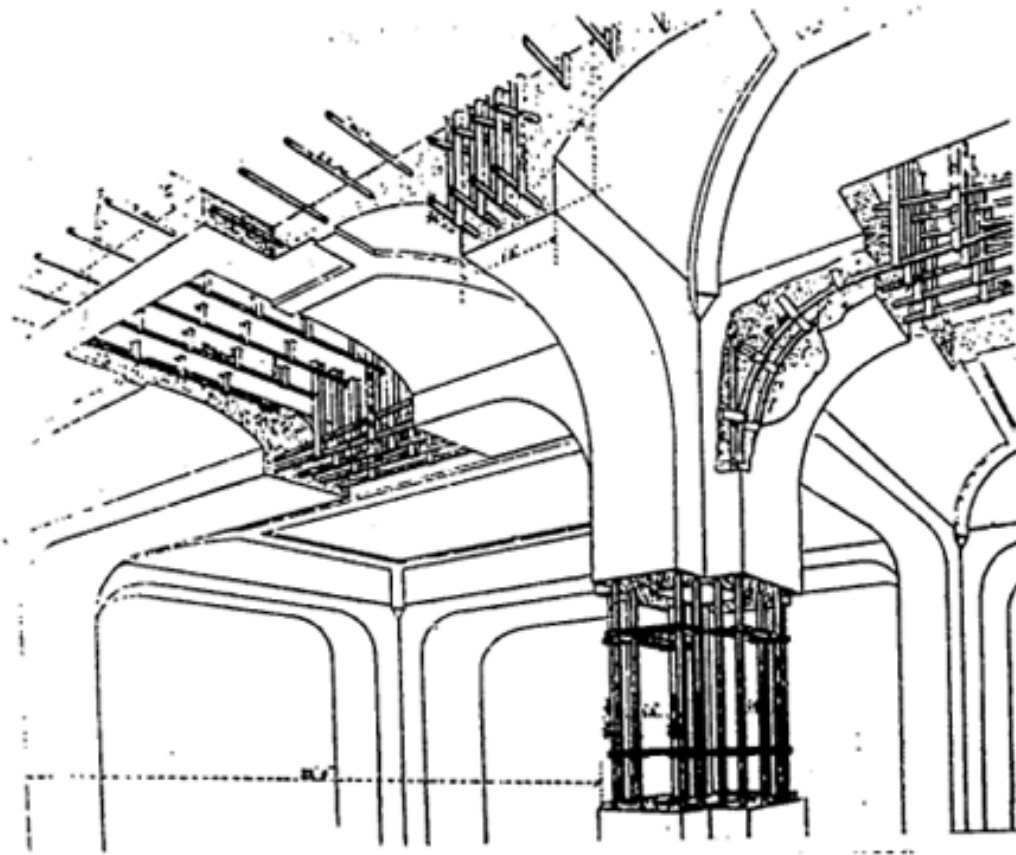


Reinforced Concrete Structures II.

I.

Vasbetonszerkezetek II.

- Lemezelmélet -



Dr. Kovács Imre PhD
tanszékvezető
főiskolai tanár

E-mail:

dr.kovacs.imre@gmail.com

Mobil:

06-30-743-68-65

Iroda:

06-52-415-155 / 77764

WEB:

<http://epitotsz.mk.unideb.hu/>

Reinforced concrete slabs - Overview

Monolit vasbeton lemezek – Tartalmi áttekintés

- A rugalmas lemez fogalma és differenciálegyenlete
- Lemez és gerenda differenciálegyenletének összehasonlítása
- Két és egy irányban teherviselő lemezek fogalma
- Egy irányban teherviselő lemez igénybevételeinek meghatározása
- Két irányban teherviselő lemezek közelítő megoldásai:
 - Tartókereszt eljárás
 - *Marcus, Bares* táblázatok
 - Hatásfelületek
 - Véges differenciák módszere
 - Végeselem módszer (VEM, FEM)

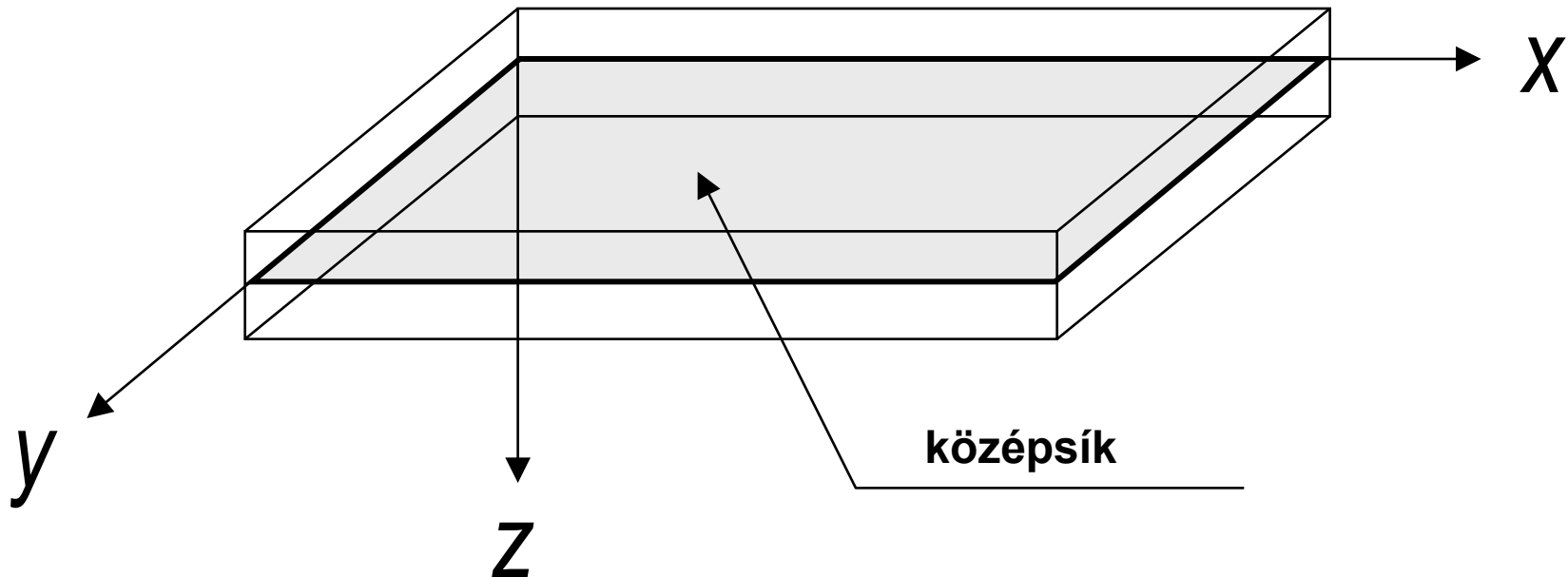
Reinforced concrete slabs - Overview

Monolit vasbeton lemezek – Tartalmi áttekintés

- Összetett lemezmezők igénybevételeinek meghatározása
- Gombafödémek igénybevételei
- Síklemez födémek igénybevételei, átszúródás és átlyukadás
- Monolit vasbeton lemezek közelítő méretfelvétele
- Monolit vasbeton lemezek vasalása, vasvezetés
- Monolit vasbeton lemezek szerkesztési szabályai
- Monolit vasbeton lemezek jellemző csomópontjai
- Lemezek töréselmélete

Geometry of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez geometriája



Theory of Kirchhoff-type elastic slab

Kirchhoff-féle rugalmas lemezelmélet alapfeltevései

- A lemez vastagsága befoglaló méreteihez képest kicsi és állandó

$$\min(I_x, I_y) / v > 5$$

- A lemez középsíkjában fekvő pontok csak a középsíkjára merőlegesen tolódnak el, ez az eltolódás a lemez vastagsághoz képest kicsi

$$v / w_{\max} > 5$$

- A középsík normálisán fekvő pontok a deformált középfelület azonos normálisain sorakoznak, a közös normálison fekvő pontok relatív elmozdulásai elhanyagolhatóan kicsik, érvényes a *Bernoulli-Navier* féle hipotézis.

Theory of Kirchhoff-type elastic slab

Kirchhoff-féle rugalmas lemezelmélet alapfeltevései

- A lemez anyaga homogén, izotróp és lineárisan rugalmas
- A középfelületre merőleges feszültségek elhanyagolhatók
- A lemez síkjában az elmozdulások szabadon létrejöhetnek

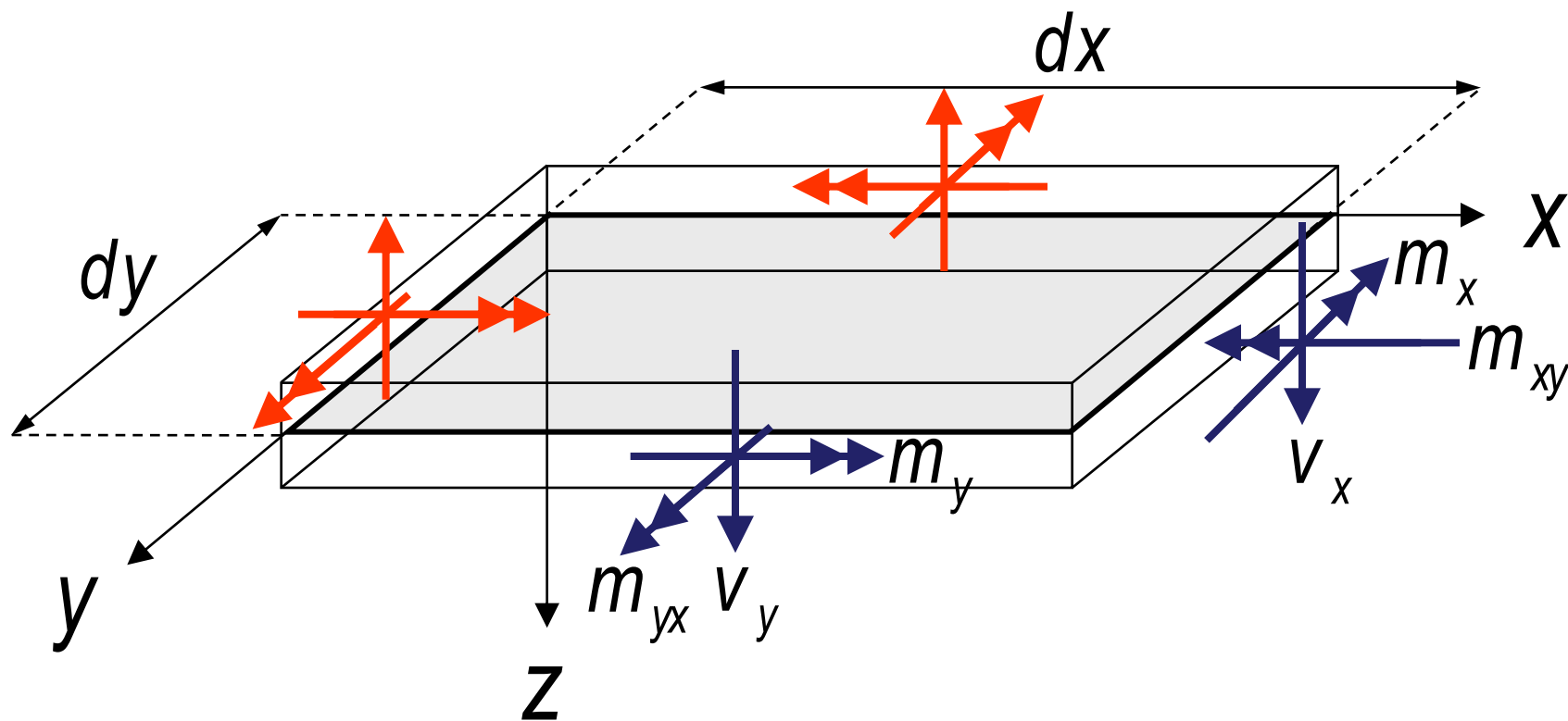
Megjegyzés: Vasbeton lemezek esetén a fenti alapfeltevések csak közelítően teljesülnek!

Pl.: Egy lemez egymásra merőleges és erősségében jelentősen eltérő kialakítású vasalása nem eredményez izotróp viselkedést!

A használhatósági határállapotokban tapasztalható berepedt állapot a rugalmas elven meghatározott igénybevételek képlékeny alapon történő átrendeződéséhez vezet!

Bending, shear and torsion of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei



Bending, shear and torsion of Kirchoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei

x és y irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Bending, shear and torsion of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei

x és y irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{xy} = m_{yx} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Bending, shear and torsion of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei

x és y irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{xy} = m_{yx} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

x és y irányú fajlagos nyíróerők

$$v_x = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$v_y = -K \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Bending, shear and torsion of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei

x és y irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{xy} = m_{yx} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

x és y irányú fajlagos nyíróerők

$$v_x = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$v_y = -K \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

a lemez hajlítómerevsége

$$K = \frac{E \cdot v^3}{12 \cdot (1 - \mu_c^2)}$$

Bending, shear and torsion of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei

x és y irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{xy} = m_{yx} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

x és y irányú fajlagos nyíróerők

$$v_x = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$v_y = -K \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

a lemez hajlítómerevsége

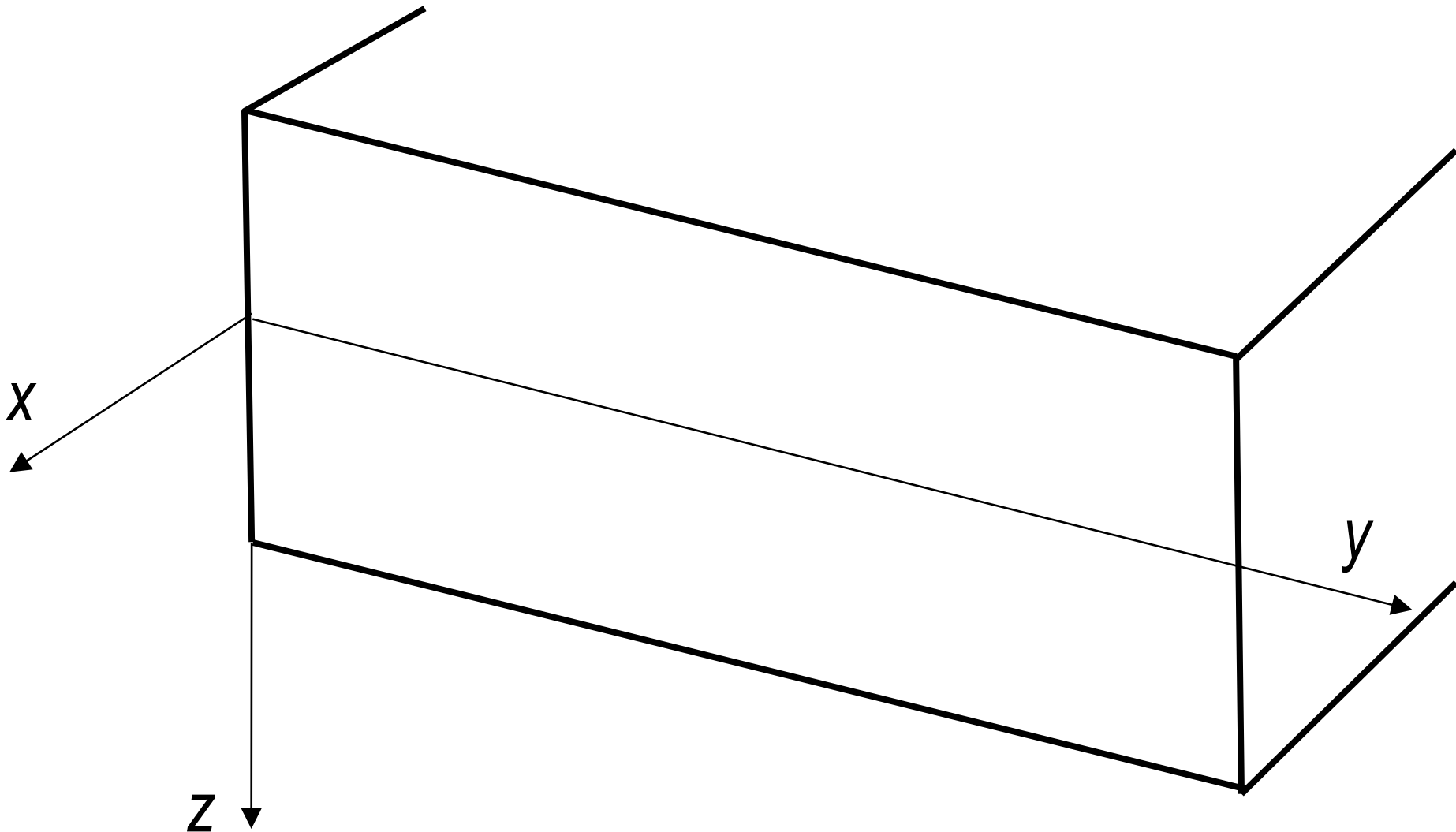
$$K = \frac{E \cdot v^3}{12 \cdot (1 - \mu_c^2)}$$

Rugalmissági
modulus

Harántnyúlási tényező
(Poisson szám reciproka)
0,15~0,20

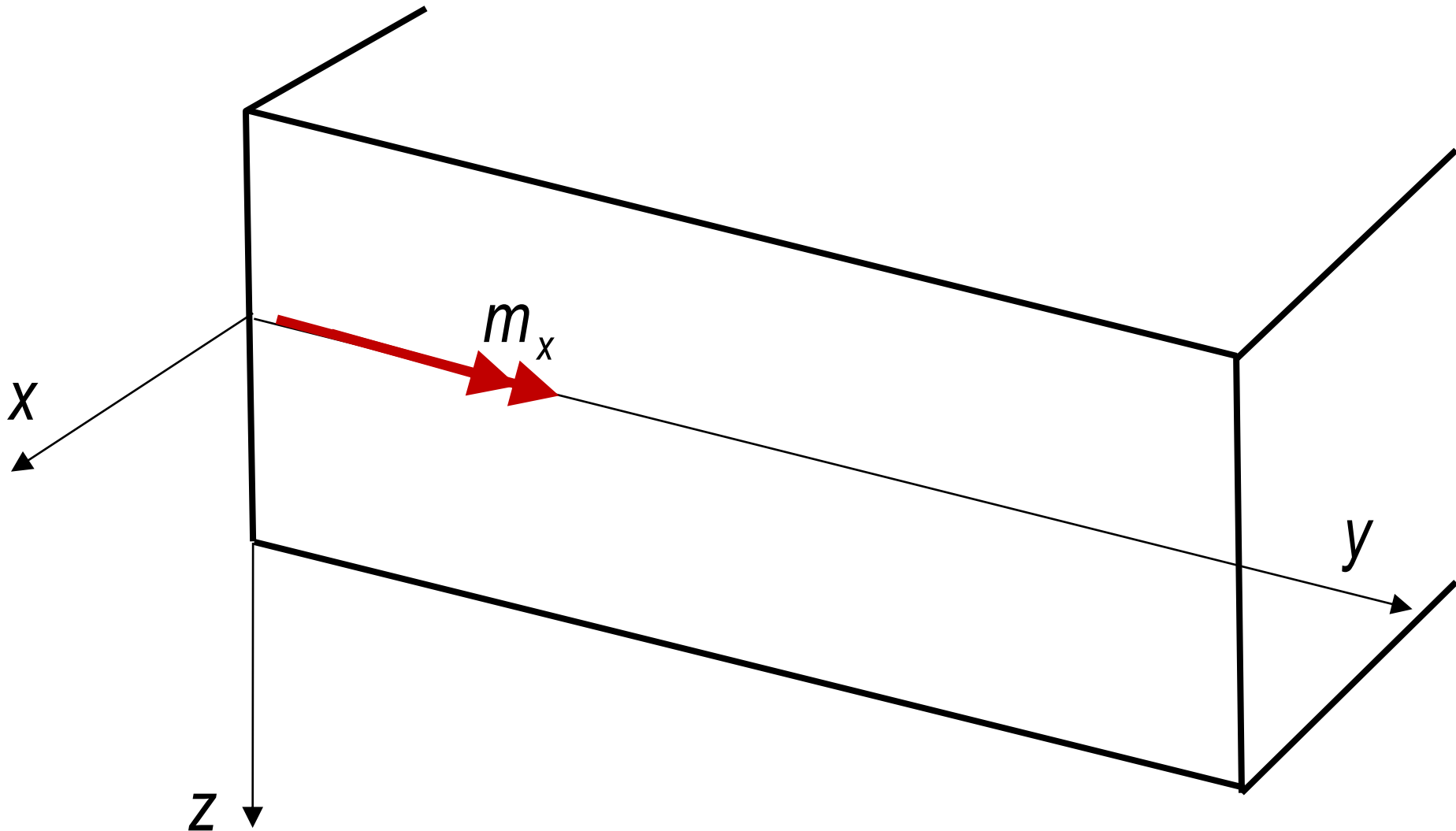
Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



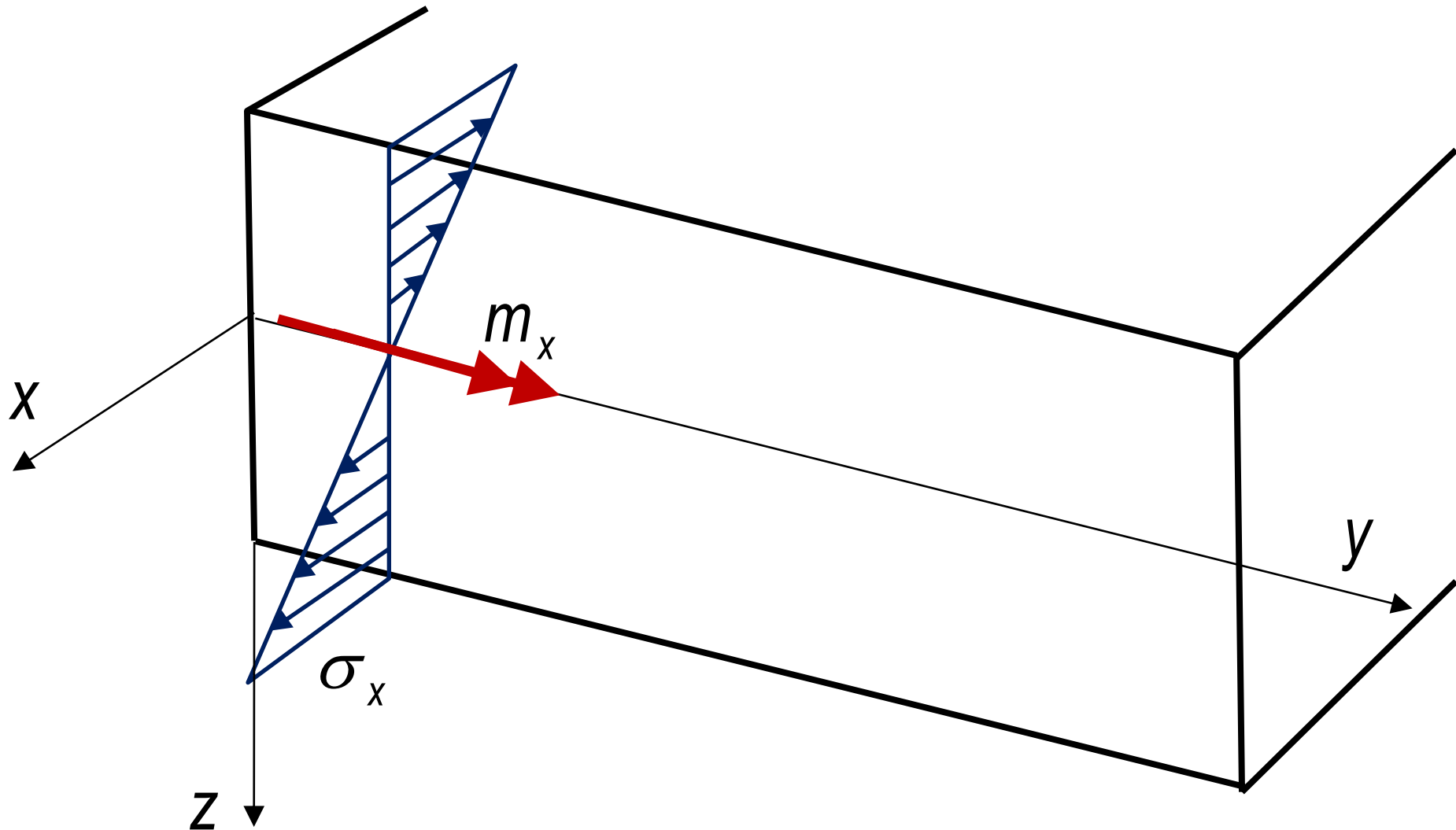
Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



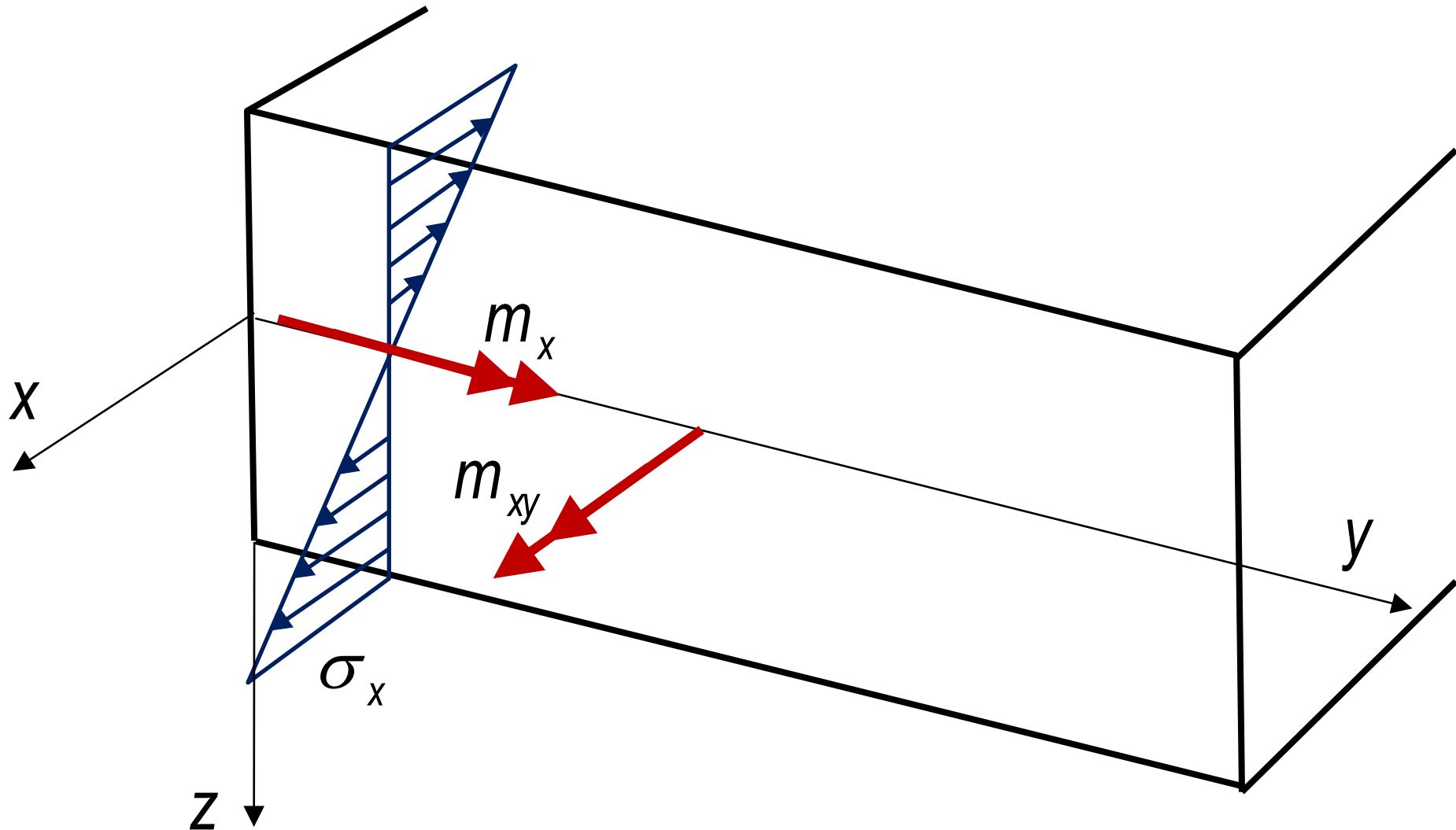
Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



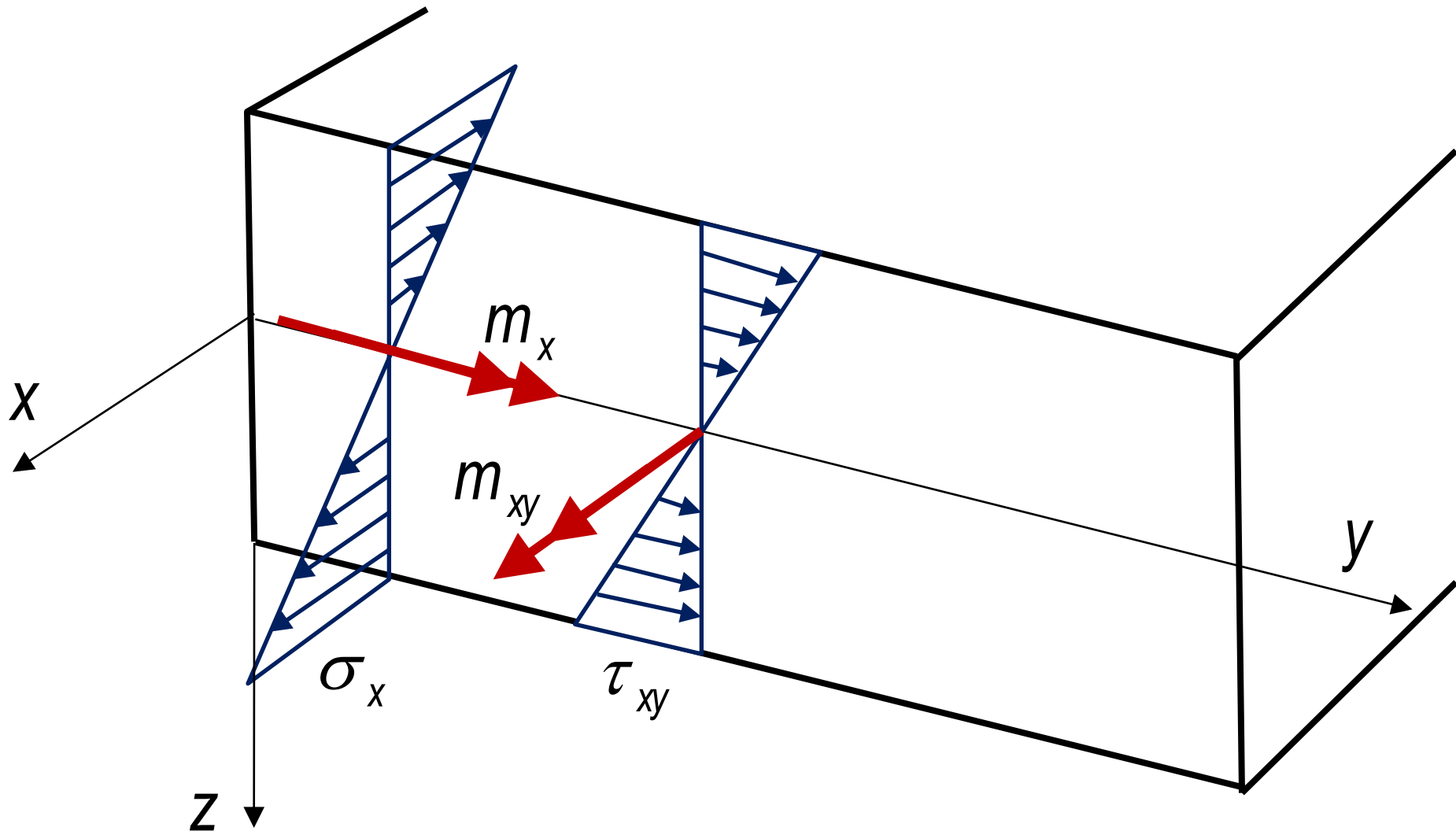
Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



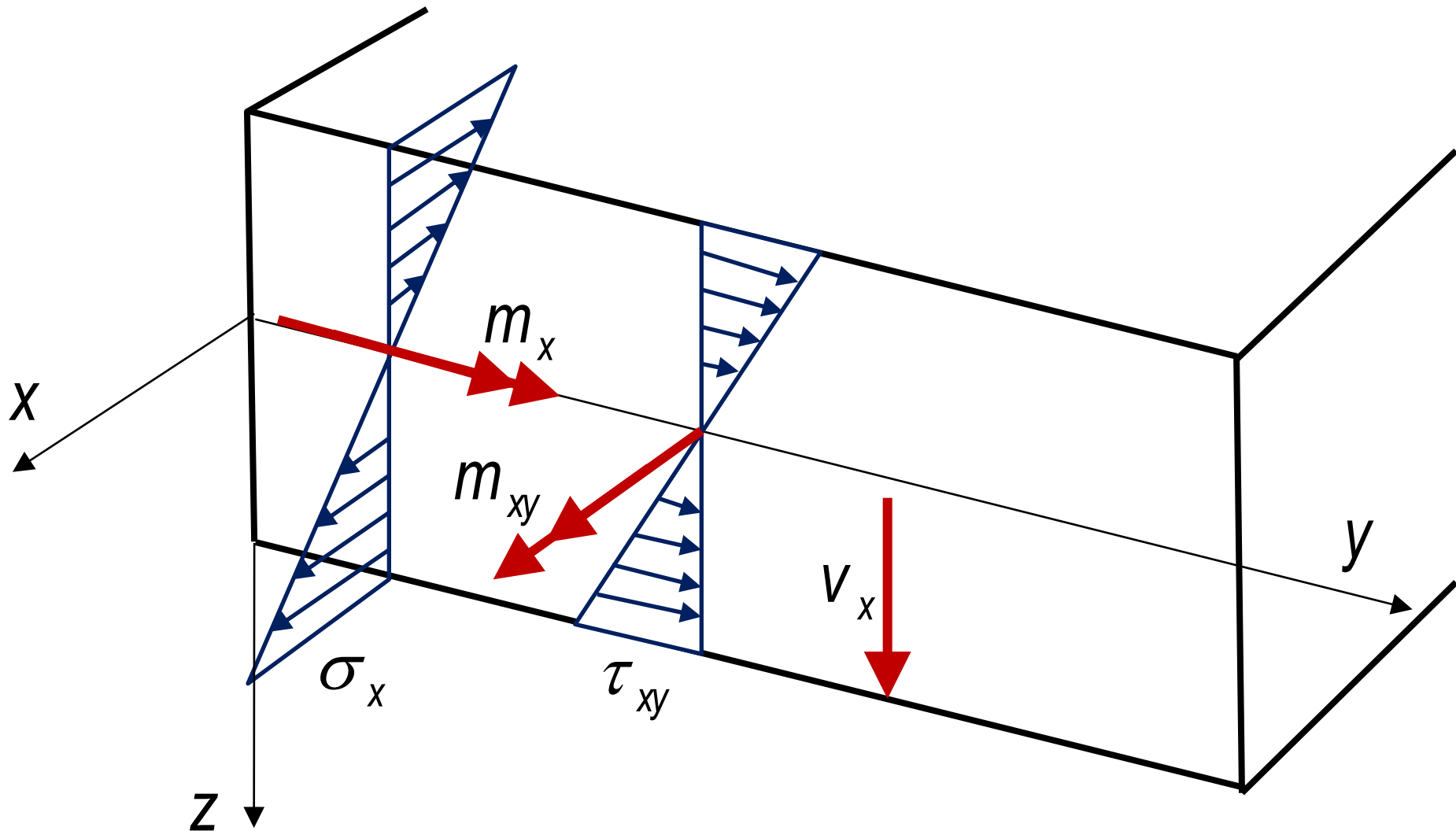
Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



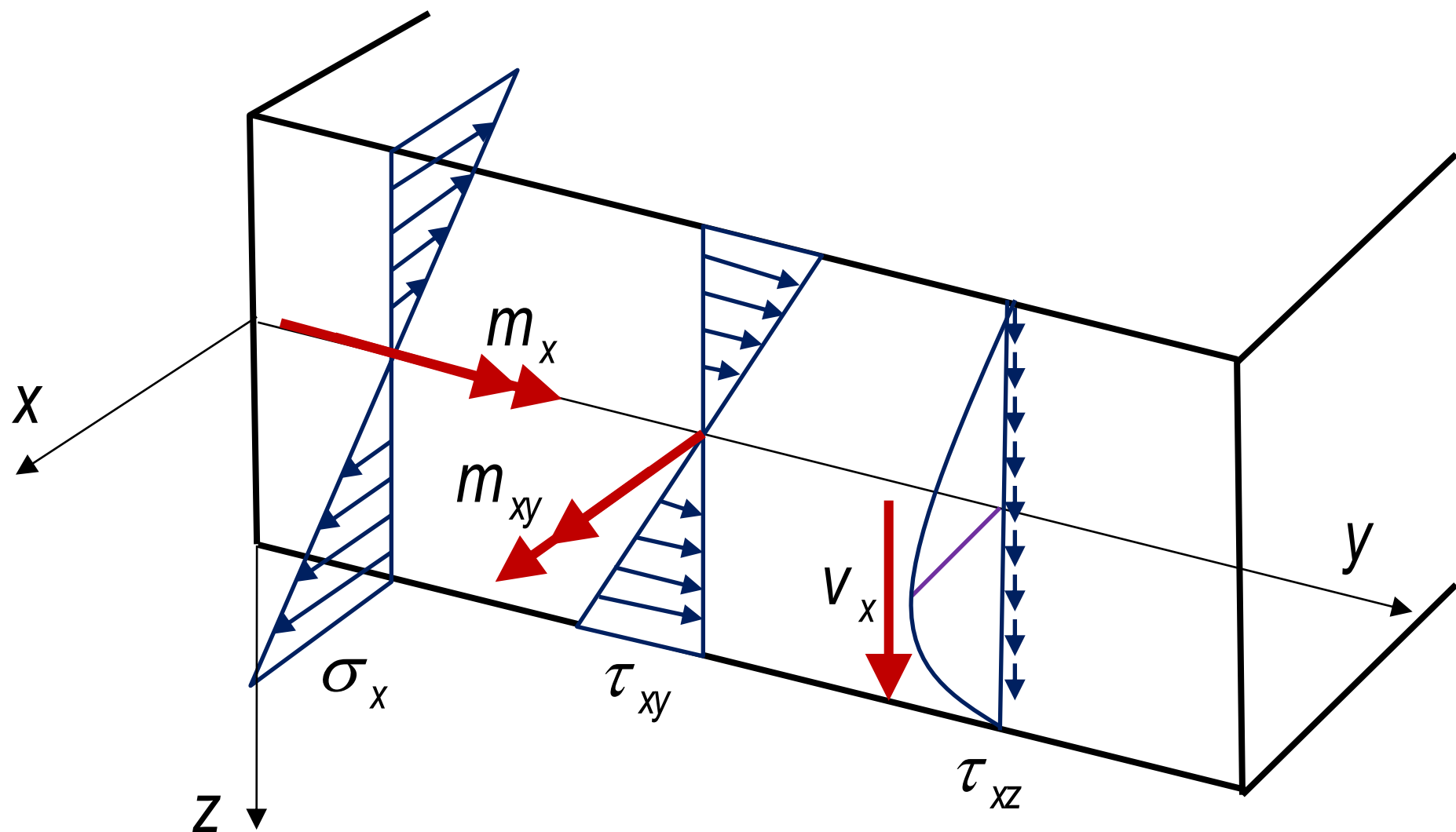
Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



Stresses of Kirchhoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez feszültségei



Equilibrium of Kirchoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez egyensúlya

Lemezelem **egyensúlyi** egyenlete:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

Equilibrium of Kirchoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez egyensúlya

Lemezelem **egyensúlyi** egyenlete:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

Fizikai (**anyag**) egyenletek:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_c^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu_c \cdot \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu_c)} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_c^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu_c \cdot \varepsilon_x)$$

Equilibrium of Kirchoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez egyensúlya

Lemezelem **egyensúlyi** egyenlete:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

Fizikai (**anyag**) egyenletek:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_c^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu_c \cdot \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu_c)} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_c^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu_c \cdot \varepsilon_x)$$

Kompatibilitási (összeférhetőségi) egyenletek

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Equilibrium of Kirchoff-type slab

Kirchhoff-féle lemez egyensúlya

Lemezelem **egyensúlyi** egyenlete:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

Fizikai (**anyag**) egyenletek:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_c^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu_c \cdot \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu_c)} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_c^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu_c \cdot \varepsilon_x)$$

Kompatibilitási (összeférhetőségi) egyenletek

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Lemez egyenlet:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{k}$$

Equation of elastic slab

Rugalmas lemez egyenlete

Lemez egyenlet:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{k}$$

Lagrange féle formula (1812)

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{k}$$

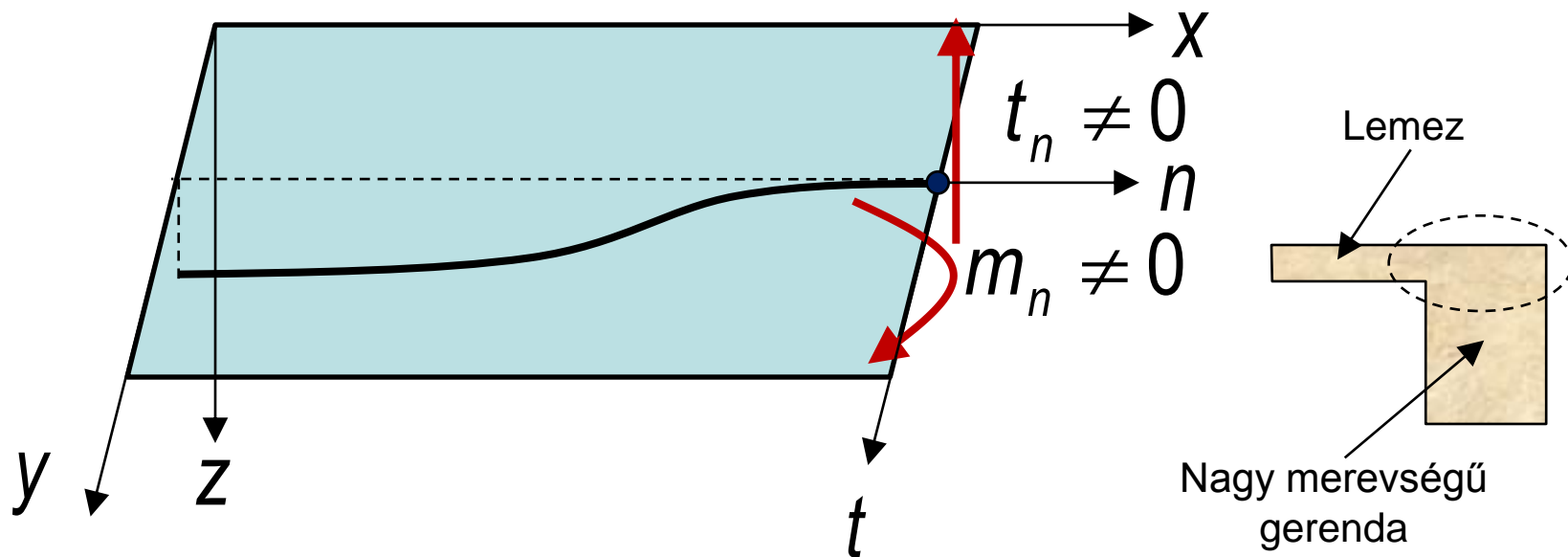
Kétféltváltozós Laplace operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Kétféltváltozós, negyedrendű (biharmonikus) differenciálegyenlet matematikai határozottságához minden perempontban két peremfeltételt kell előírni!

Fix edge

Befogott perem

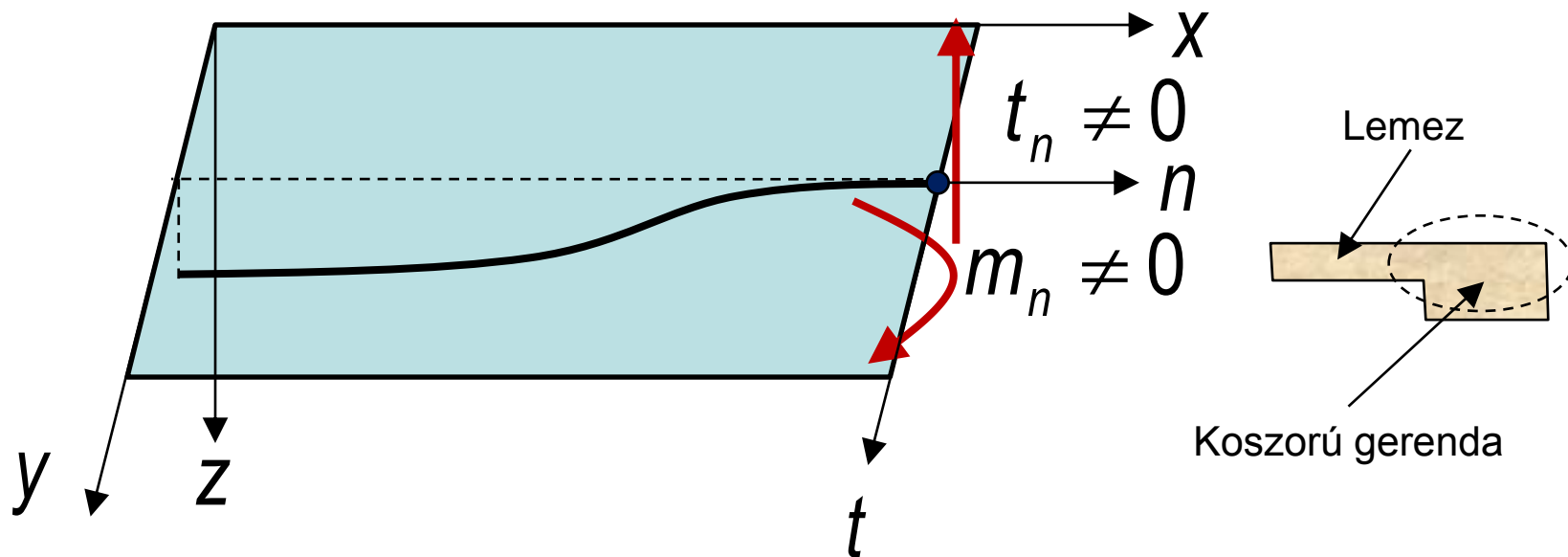


A perem függőleges eltolódása zérus. \Rightarrow $w = 0$

A perem elfordulása zérus. \Rightarrow $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

Semi rigid edge

Rugalmasan befogott perem



A perem függőleges eltolódása zérus. \Rightarrow

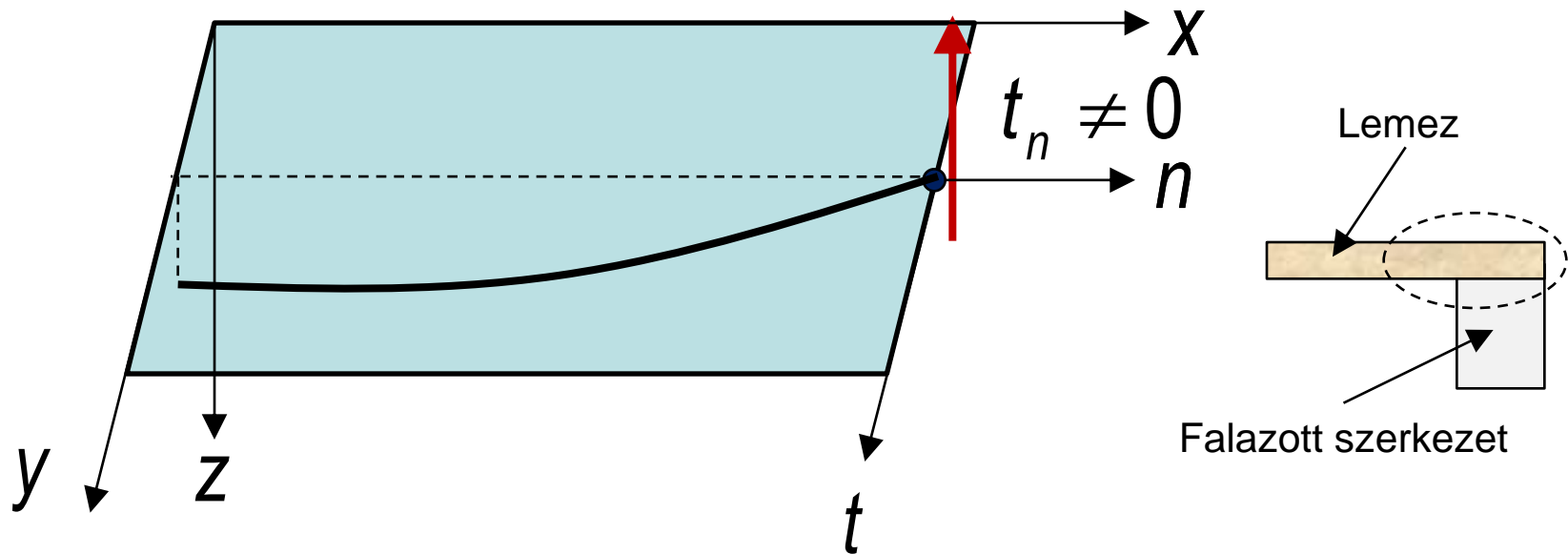
$$w = 0$$

A perem elfordulása az elfordulási merevséget jellemző rugóállandótól függ: \Rightarrow

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{c} \cdot m_n$$

Navier type simply supported edge

Navier-féle szabadon felfekvő perem

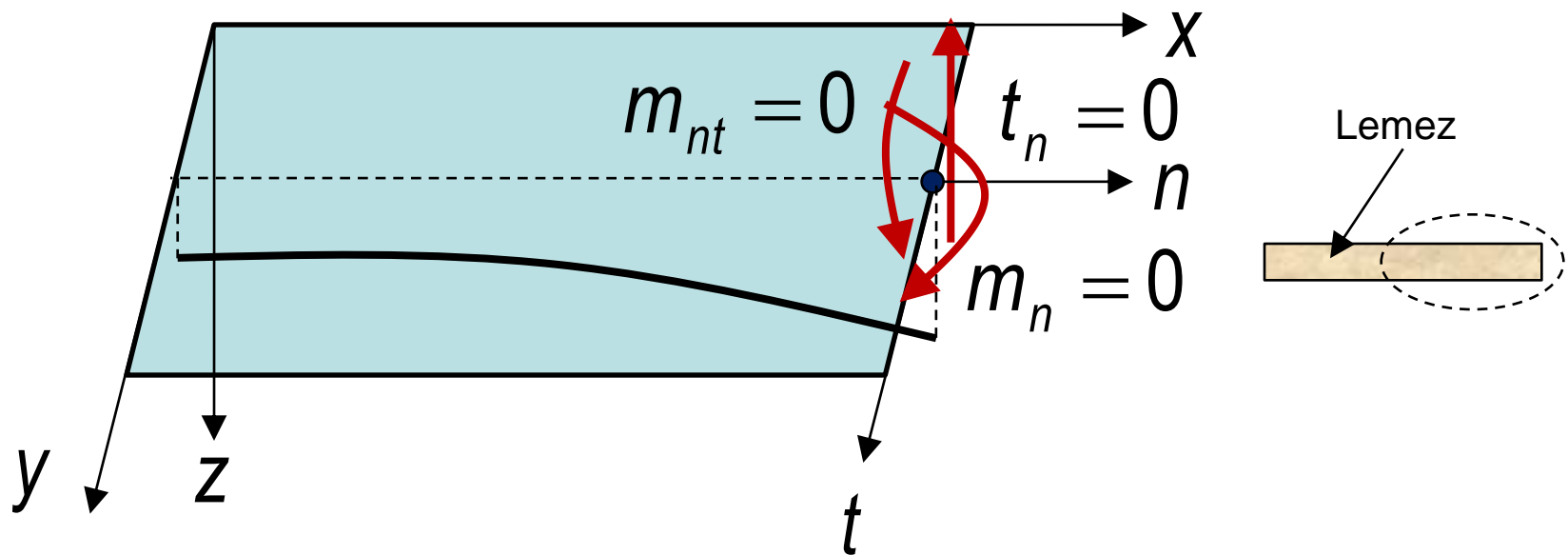


A perem függőleges eltolódása zérus: $\Rightarrow w = 0$

A perem elfordulása megengedett: $\Rightarrow m_n = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0$

Free edge

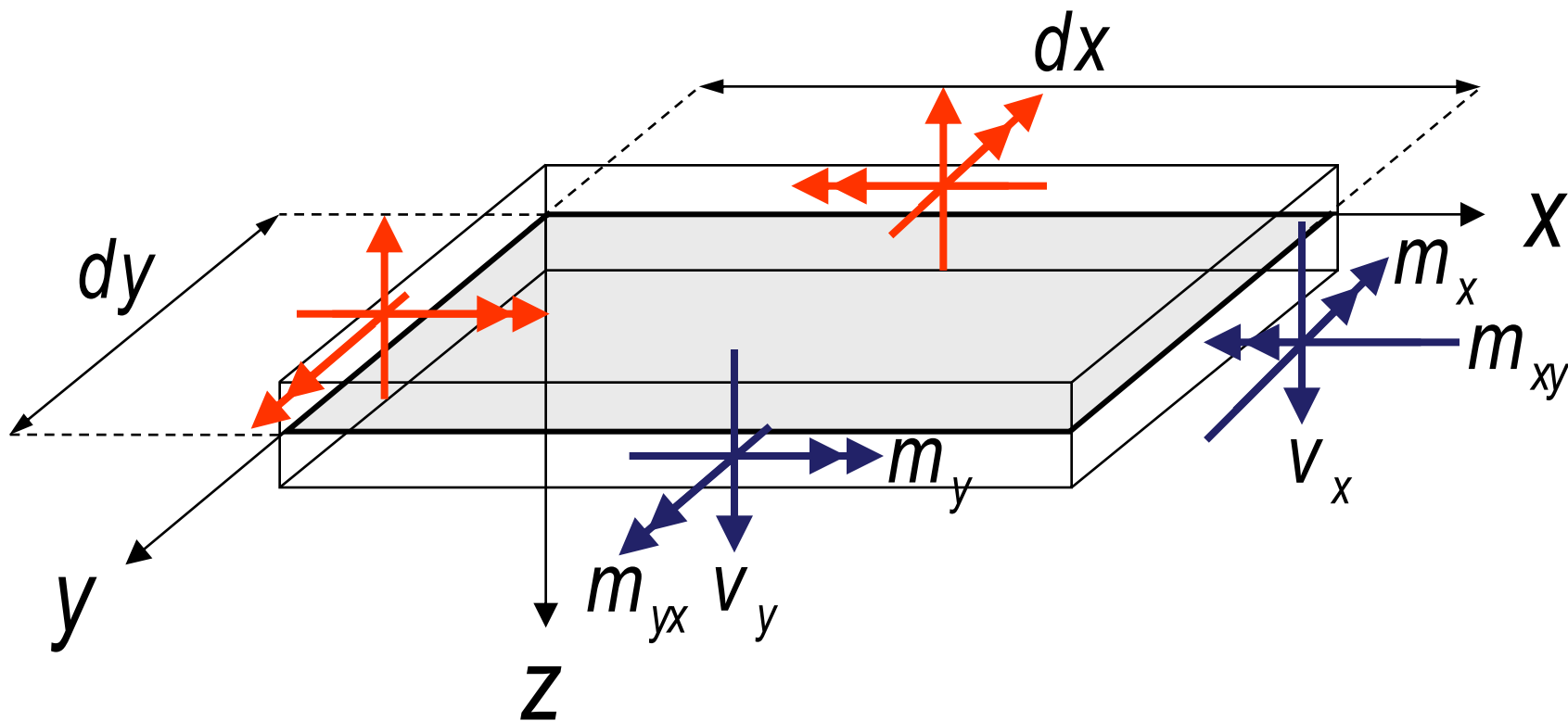
Szabad perem



Az általános megoldással a peremen értelmezett fenti három feltétel egyszerre nem teljesül → **Kirchhoff-féle peremerők** (peremvasalás alkalmazása)

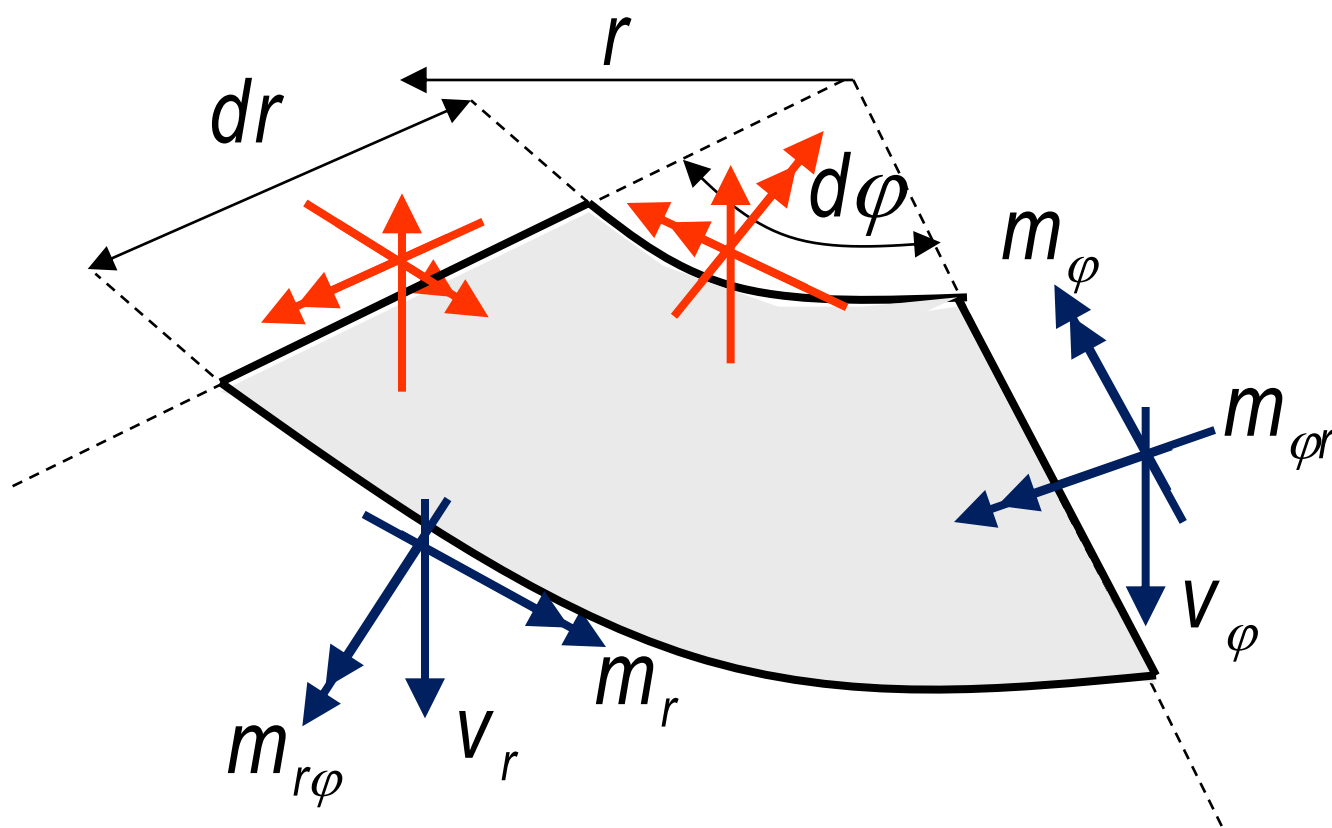
Bending, shear and torsion of Kirchhoff type slab (X-Y)

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei (X-Y)



Bending, shear and torsion of Kirchhoff type slab ($r-\phi$)

Kirchhoff-féle lemez igénybevételei ($r-\phi$)



Bending, shear and torsion of elastic circular slab

Rugalmas körlemez igénybevételei

r és ϕ irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_r = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu_c}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu_c}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$m_\phi = -K \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

Bending, shear and torsion of elastic circular slab

Rugalmas körlemez igénybevételei

r és ϕ irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_r = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu_c}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu_c}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$m_\phi = -K \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{r\phi} = m_{\phi r} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)$$

Bending, shear and torsion of elastic circular slab

Rugalmas körlemez igénybevételei

r és ϕ irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_r = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu_c}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu_c}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$m_\phi = -K \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{r\phi} = m_{\phi r} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)$$

r és ϕ irányú fajlagos nyíróerők

$$v_r = -K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$v_\phi = -K \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

Bending, shear and torsion of elastic circular slab

Rugalmas körlemez igénybevételei

r és ϕ irányú fajlagos hajlítónyomatékok

$$m_r = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu_c}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu_c}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$m_\phi = -K \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

fajlagos csavarónyomatékok

$$m_{r\phi} = m_{\phi r} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)$$

r és ϕ irányú fajlagos nyíróerők

$$v_r = -K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$v_\phi = -K \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

a lemez hajlítómerevsége

Rugalmasági
modulus

$$K = \frac{E \cdot v^3}{12 \cdot (1 - \mu_c^2)}$$

Harántnyúlási tényező
(Poisson szám reciproka)
0,15~0,20

Equilibrium of elastic circular slab

Rugalmas körlemez egyensúlya

Körlemez egyensúlyi egyenlete:

$$\frac{\partial^2 m_r}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi^2} = -p(r, \varphi)$$

Lagrange féle formula (1812)

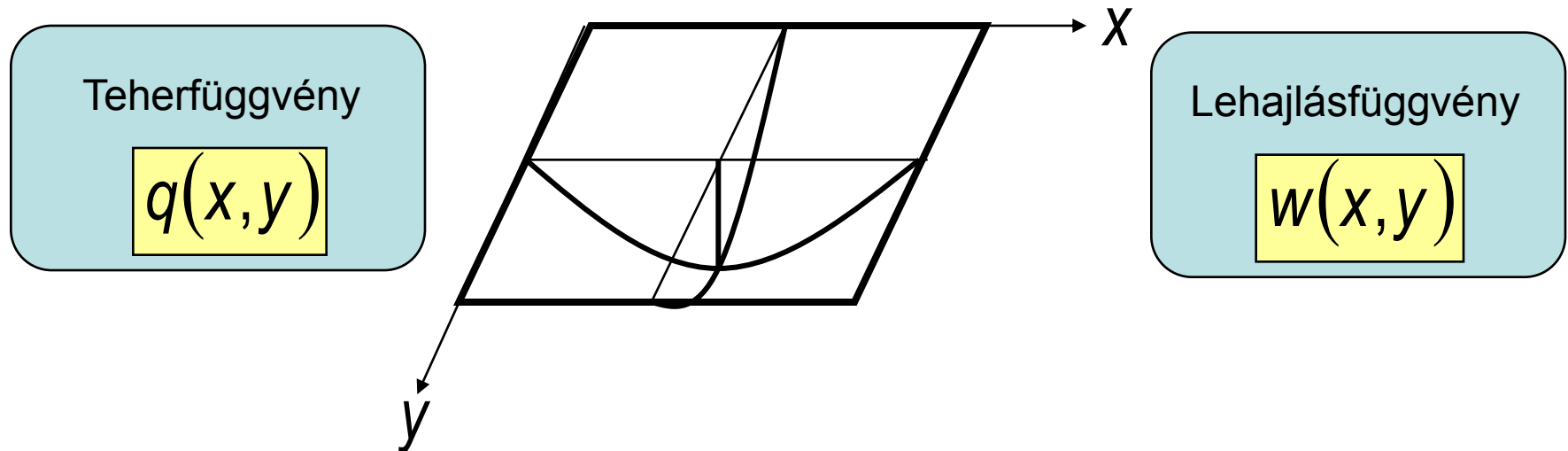
$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{K}$$

Kétfváltozós Laplace operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Analitical solution for rectangular slab

Téglalap alakú lemez analitikus megoldása



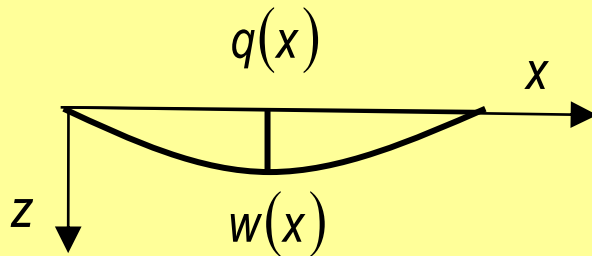
Az analitikus megoldás az ismert teher- és az ismeretlen lehajlásfüggvény Fourier sorba fejtésével nyerhető:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}$$

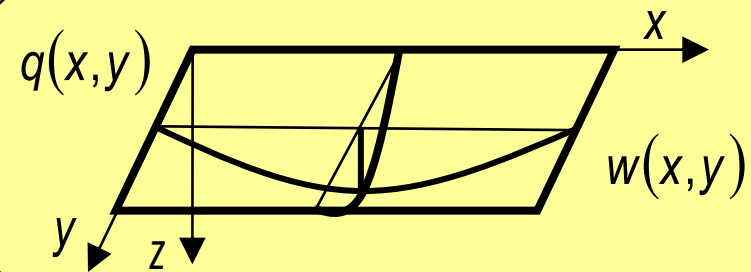
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



Rugalmas vonal differenciálegyenlete / Lagrange-féle lemezegyenlete

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{K}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{K}$$

Hajlítási merevség

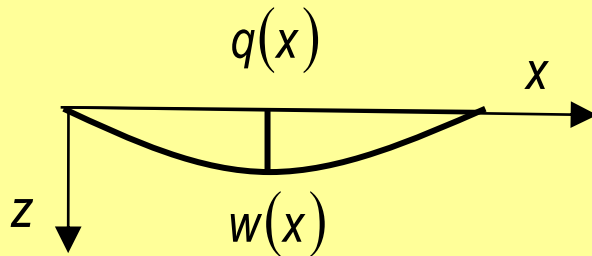
$$K = E \cdot I \quad I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$K = \frac{E \cdot I}{1 - \mu_c^2} \quad I = \frac{v^3}{12}$$

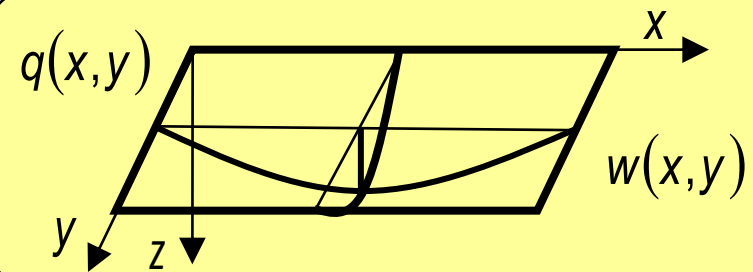
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



Hajlítónyomatékok

$$M_x = -K \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$M_y \equiv 0$$

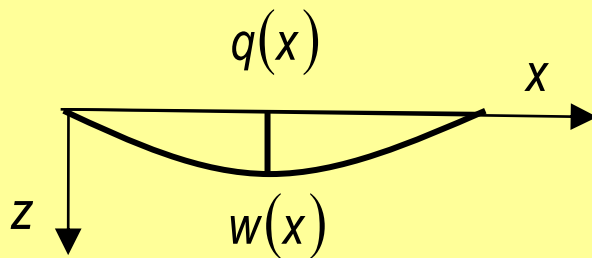
$$m_x = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

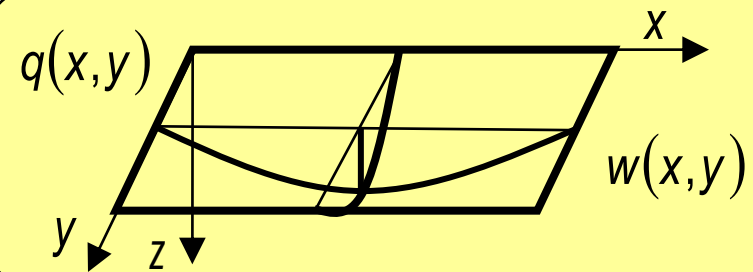
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



Csavaró nyomatékok

Amennyiben a teher a gerenda tengelyének síkjában működik, nem keletkezik csarónyomaték!

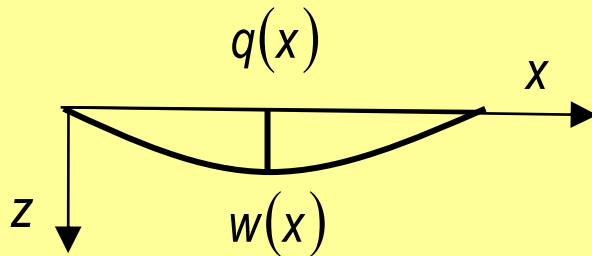
$$M_{xy} = 0$$

$$m_{xy} = m_{yx} = K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

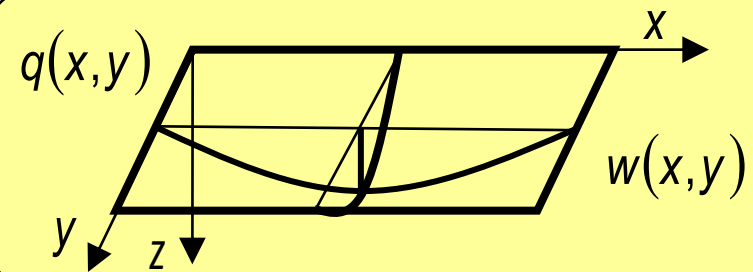
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



Nyíróerők

$$V_x = -K \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

$$V_y \equiv 0$$

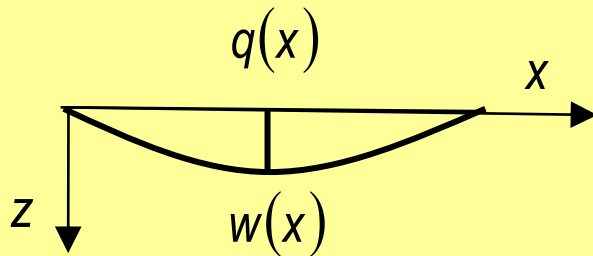
$$v_x = -K \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$v_y = -K \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

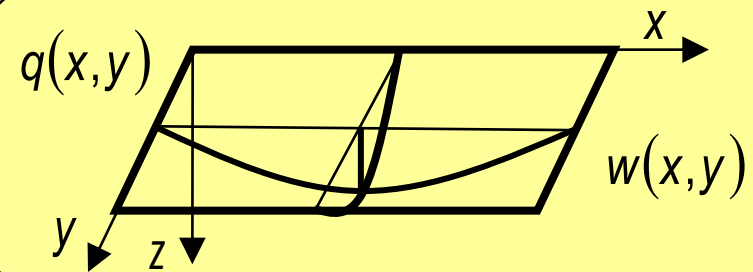
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



A teher és a nyíróerő közötti differenciális összefüggés

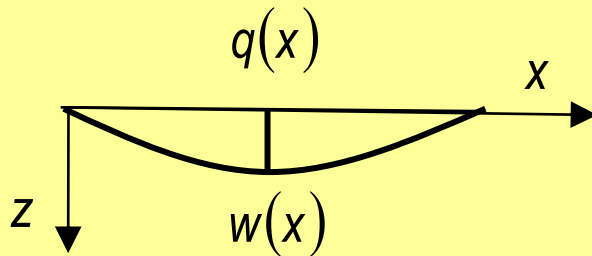
$$\frac{dV_x}{dx} + q(x) = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + q(x,y) = 0$$

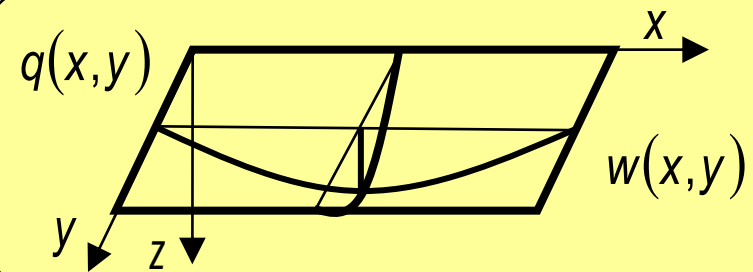
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



A nyíróerő és a hajlítónyomaték közötti differenciális összefüggés

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x}$$

$$V_y = 0$$

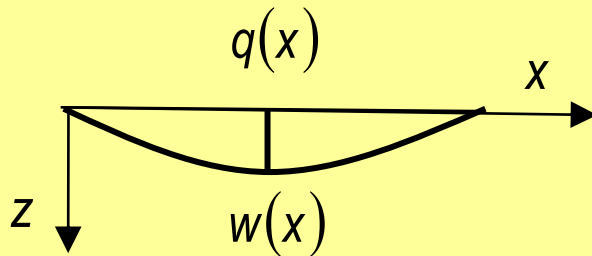
$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

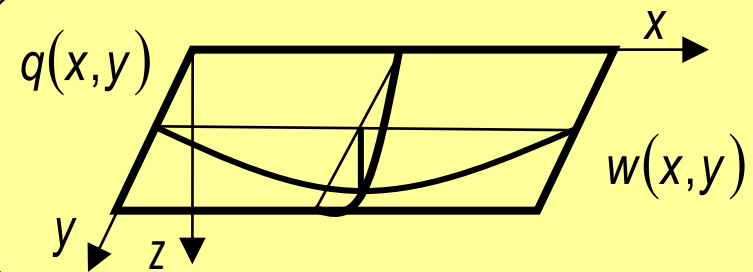
Comparison of slab and beam behaviour

Lemez és gerenda összehasonlítása

Gerenda



Lemez



A teher és a hajlítónyomaték közötti differenciális összefüggés

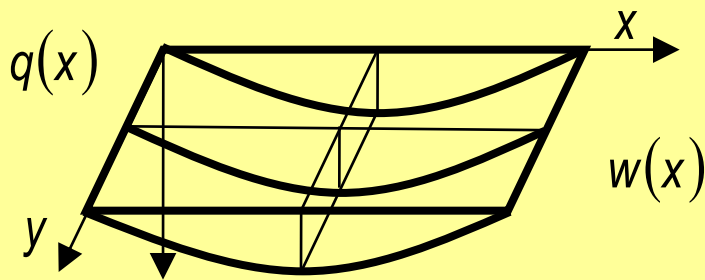
$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + q(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0$$

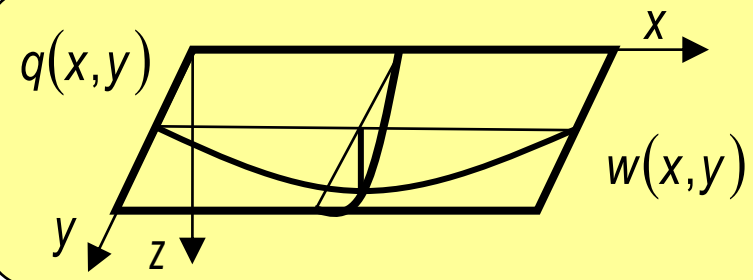
Cylindrical bending of slab

Lemezek hengeres hajlítása

Lemezek hengeres hajlítása



Kirchhoff-féle lemez (általános)



A teher és a hajlítónyomaték közötti differenciális összefüggés

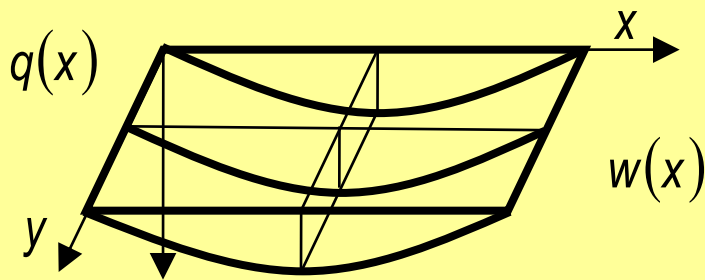
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q(x)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x,y)$$

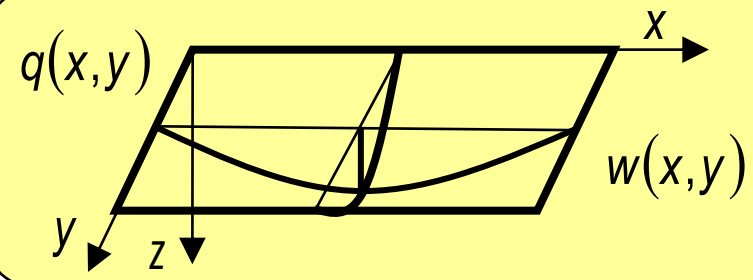
Cylindrical bending of slab

Lemezek hengeres hajlítása

Lemezek hengeres hajlítása



Kirchhoff-féle lemez (általános)



Kirchhoff-féle lemez Lagrange-féle differenciál egyenlete

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{K}$$

$$\Delta\Delta w = \frac{q(x)}{K}$$

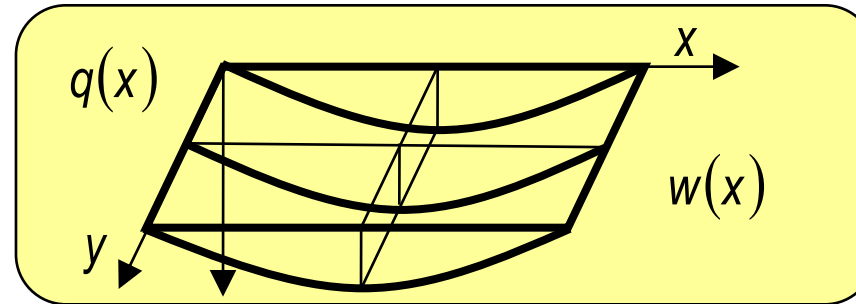
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{K}$$

$$\Delta\Delta w = \frac{q(x,y)}{K}$$

Cylindrical bending of slab

Lemezek hengeres hajlítása

Lemezek hengeres hajlítása



A Lagrange-féle **inhomogén** differenciálegyenletet kielégítő, de a peremfeltételeken nem maradéktalanul teljesítő, hengeres lehajlásként felvett w_1 **partikuláris** megoldás

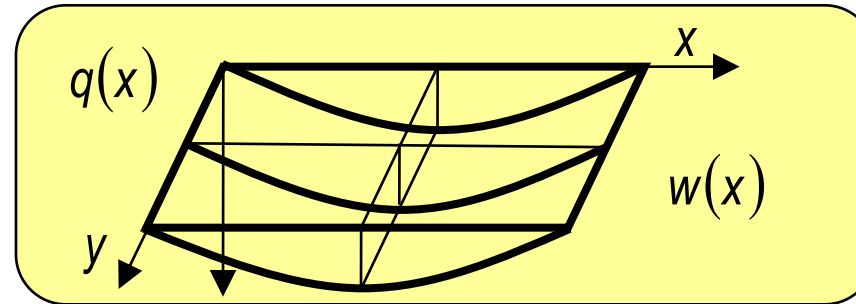
Inhomogén egyenlet:
$$\Delta\Delta w_1(x) = \frac{\partial^4 w_1(x)}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{K}$$

Partikuláris megoldás:
$$w_1(x) = \int \left\{ \int \left[\int \left(\int \frac{q(x)}{K} dx \right) dx \right] dx \right\} dx + C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

Cylindrical bending of slab

Lemezok hengeres hajlítása

Lemezok hengeres hajlítása



A **teljes megoldás** általában w_1 értékével azonosnak tekinthető a lemeztartomány nagyobb részén. A peremfeltételek kielégítése érdekében a partikuláris w_1 megoldást ki kell egészítenünk a **homogén** egyenlet w_2 megoldásával.

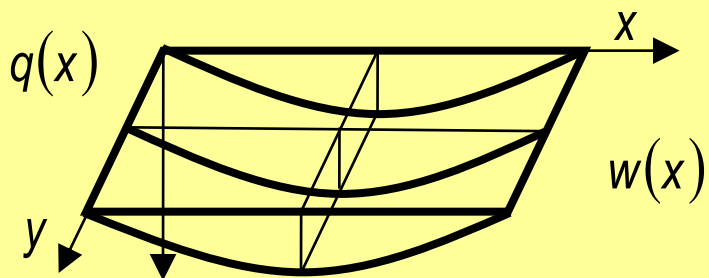
Homogén egyenlet:
$$\Delta\Delta w_2(x,y) = 0$$

Teljes megoldás:
$$w = w_1(x) + w_2(x,y)$$

One-way and two-way slabs

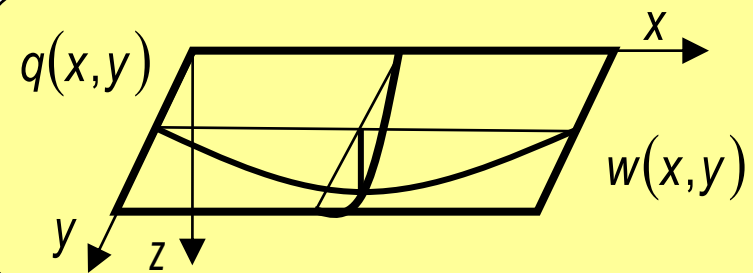
Egy és két irányban teherviselő lemezek

Egy irányban teherviselő lemez



Görbület ill. görbületváltozás csak az egyik oldalél párral párhuzamos irányban alakul ki.

Két irányban teherviselő lemez

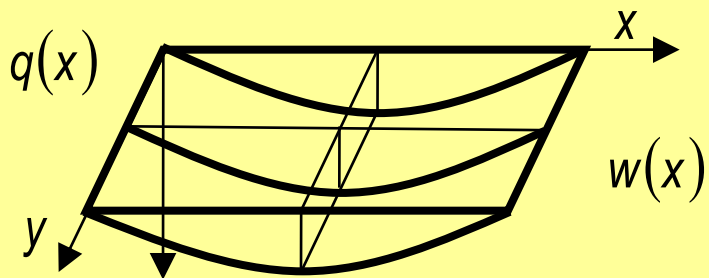


Görbület ill. görbületváltozás mindkét oldalél párral párhuzamos irányban kialakul.

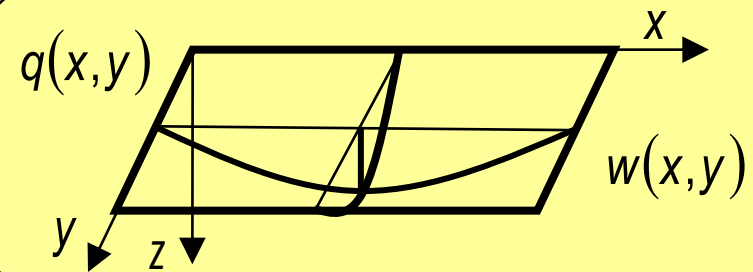
One-way and two-way slabs

Egy és két irányban teherviselő lemezek

Egy irányban teherviselő lemez



Két irányban teherviselő lemez



$$L_x / L_y > 2$$

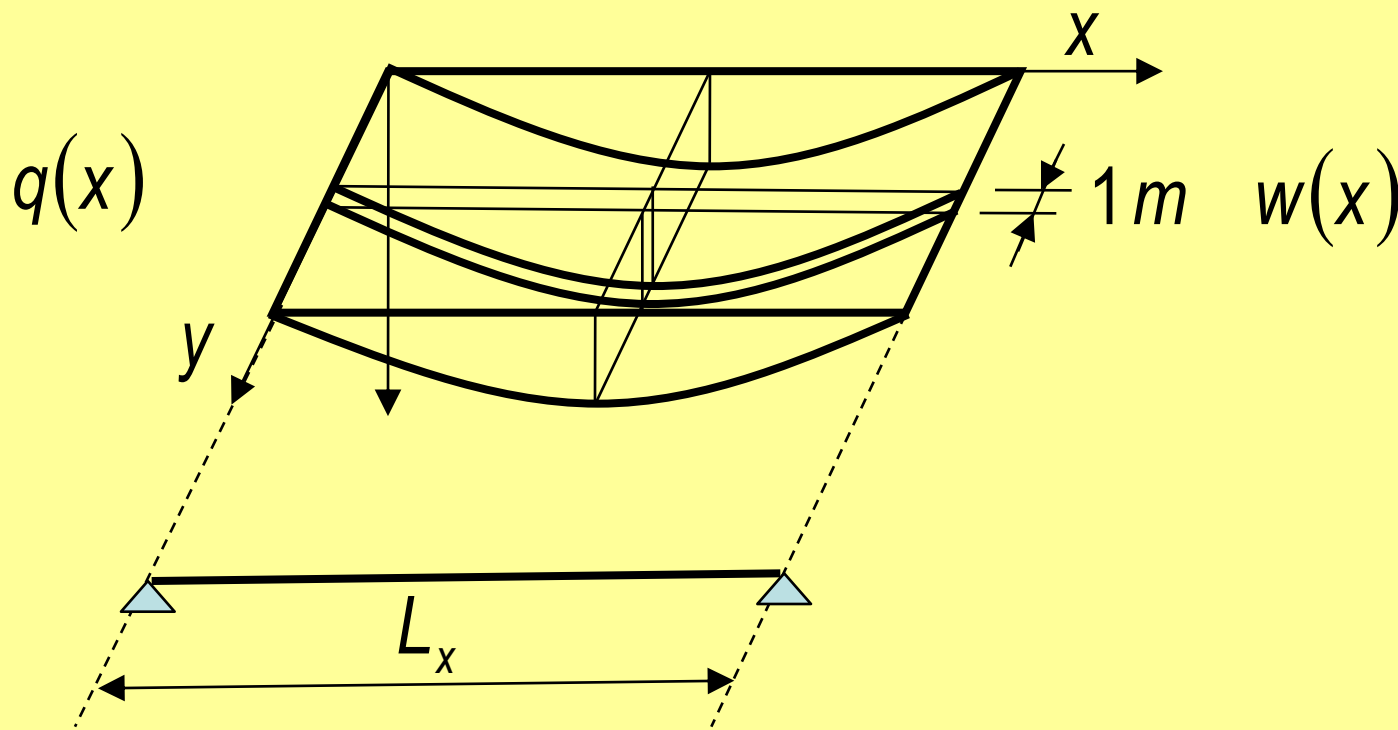
$$L_x / L_y < 0,5$$

$$0,5 \leq L_x / L_y \leq 2$$

Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Egy irányban teherviselő lemez megoldása gerenda analógia alapján



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

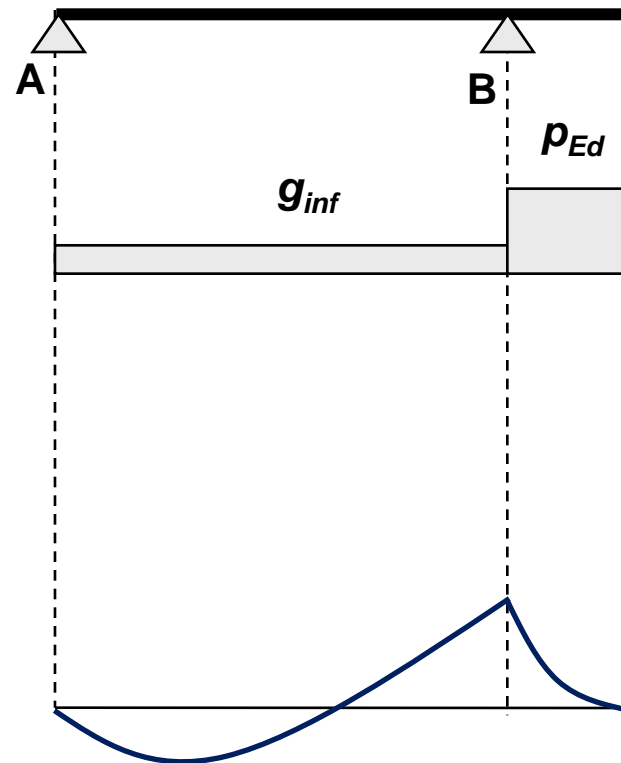
Két támaszú konzolos tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Két támaszú konzolos tartó

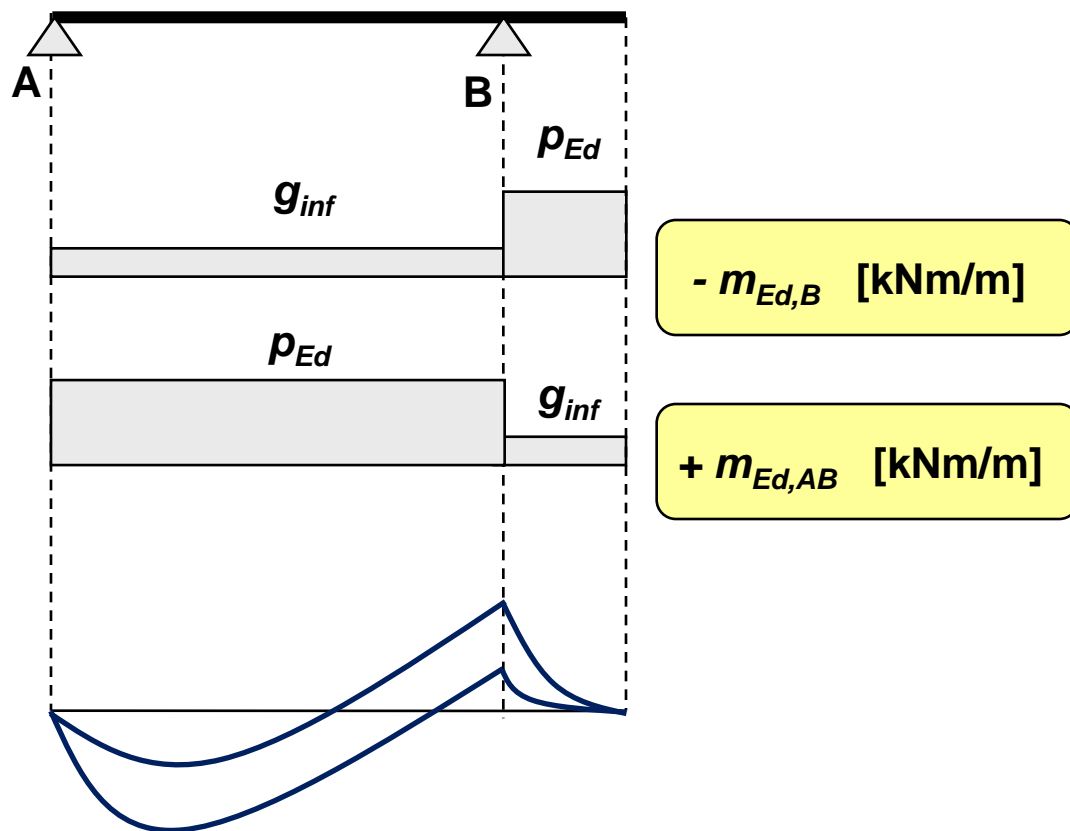


- $m_{Ed,B}$ [kNm/m]

Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

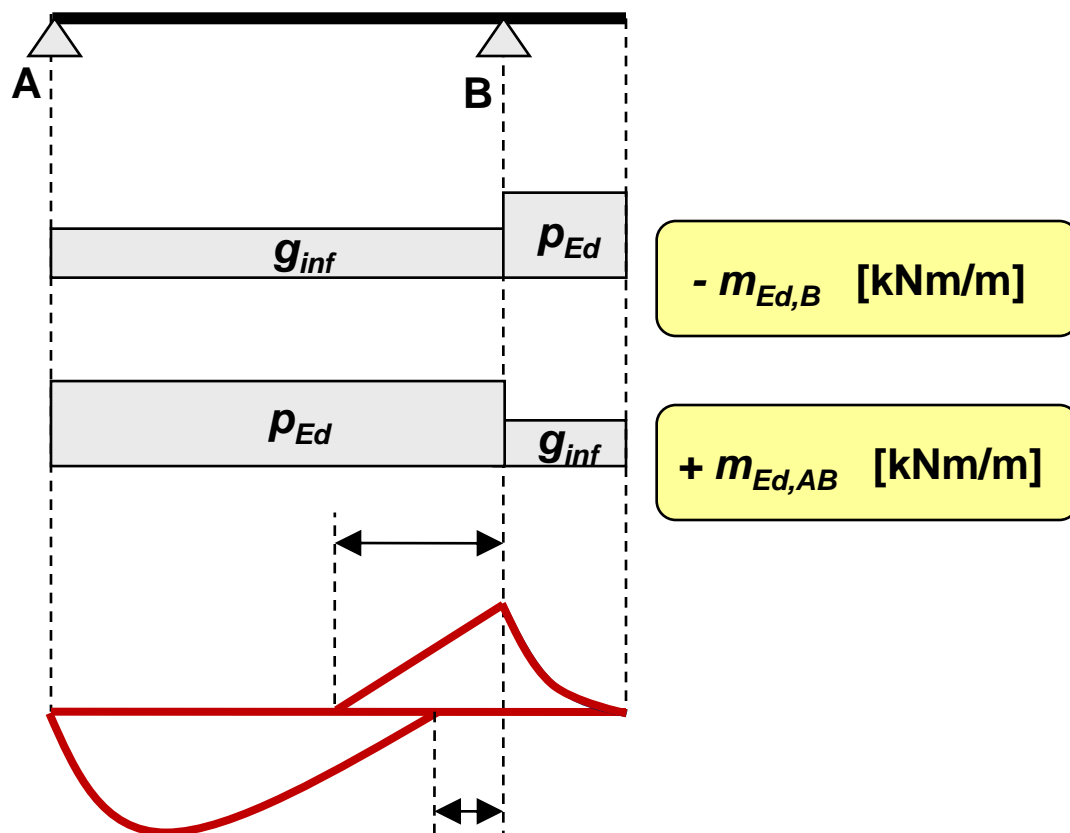
Két támaszú konzolos tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Két támaszú konzolos tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

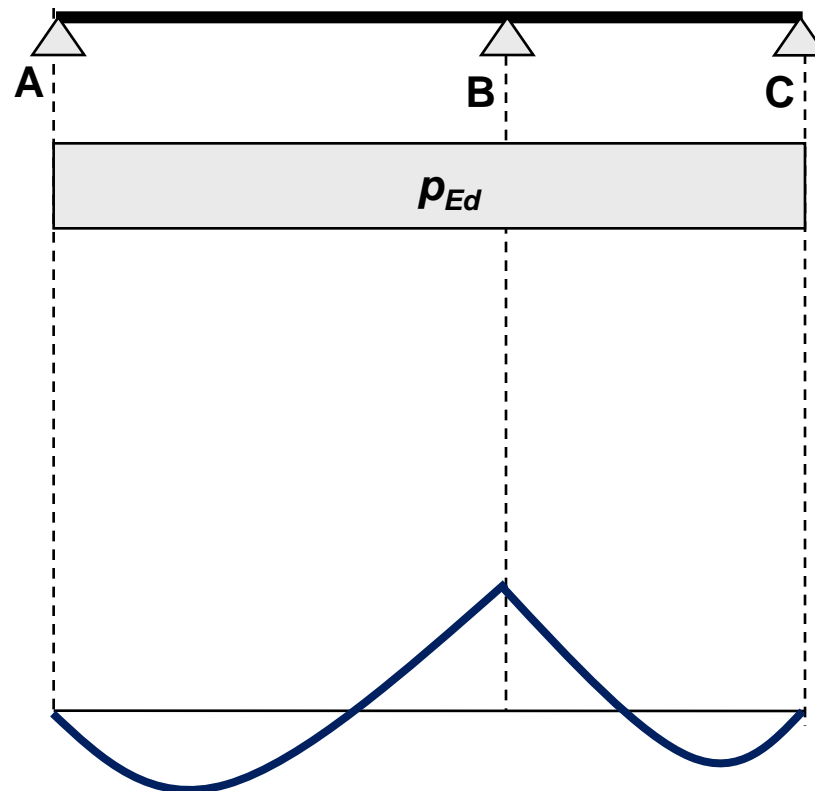
Három támaszú tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Három támaszú tartó

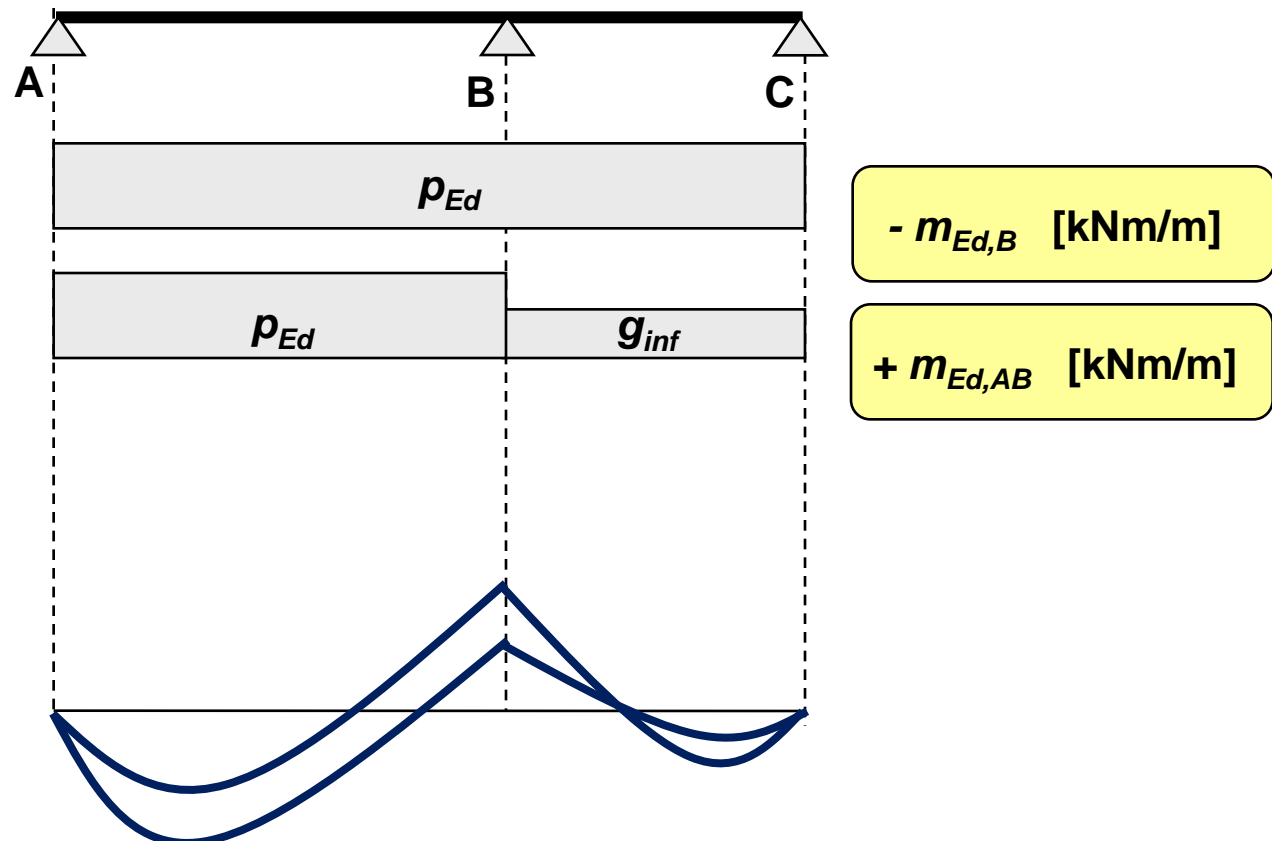


- $m_{Ed,B}$ [kNm/m]

Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Három támaszú tartó



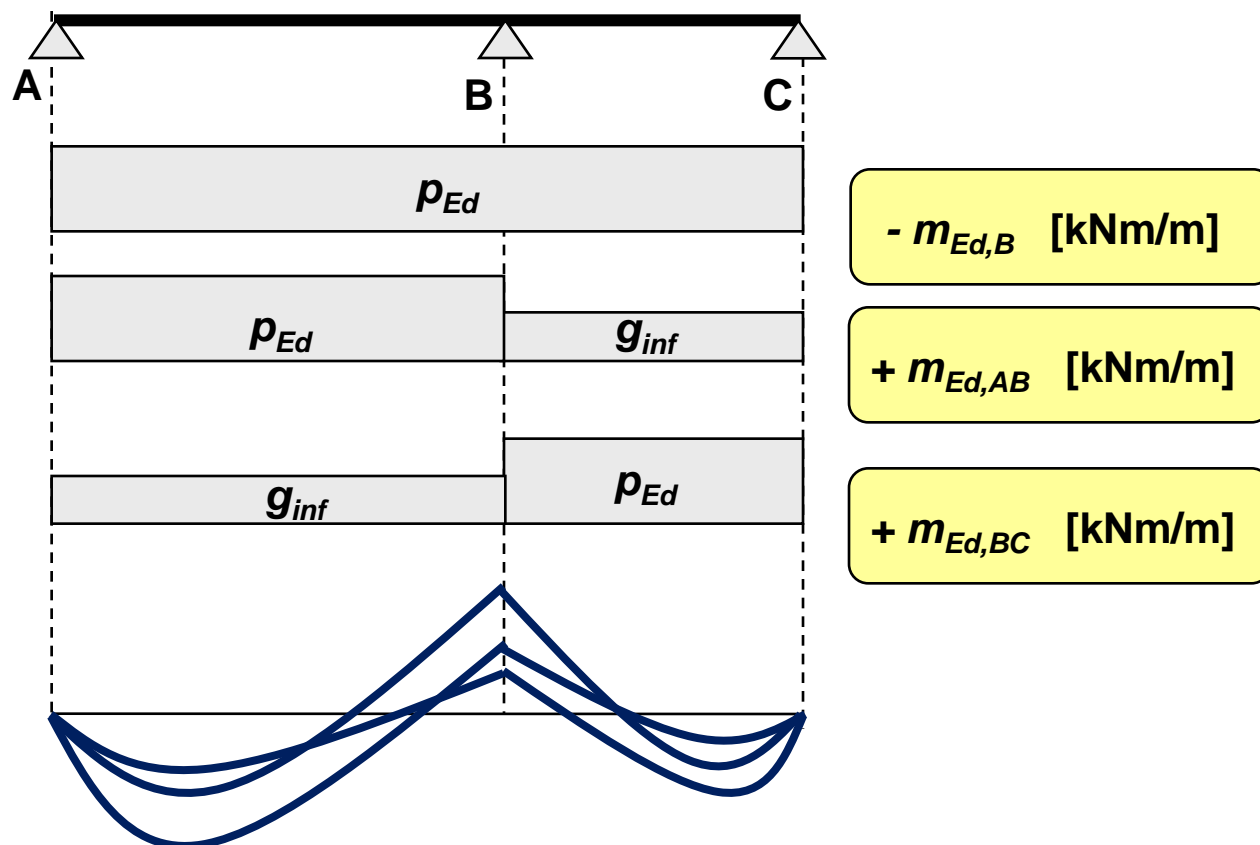
$- m_{Ed,B}$ [kNm/m]

$+ m_{Ed,AB}$ [kNm/m]

Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

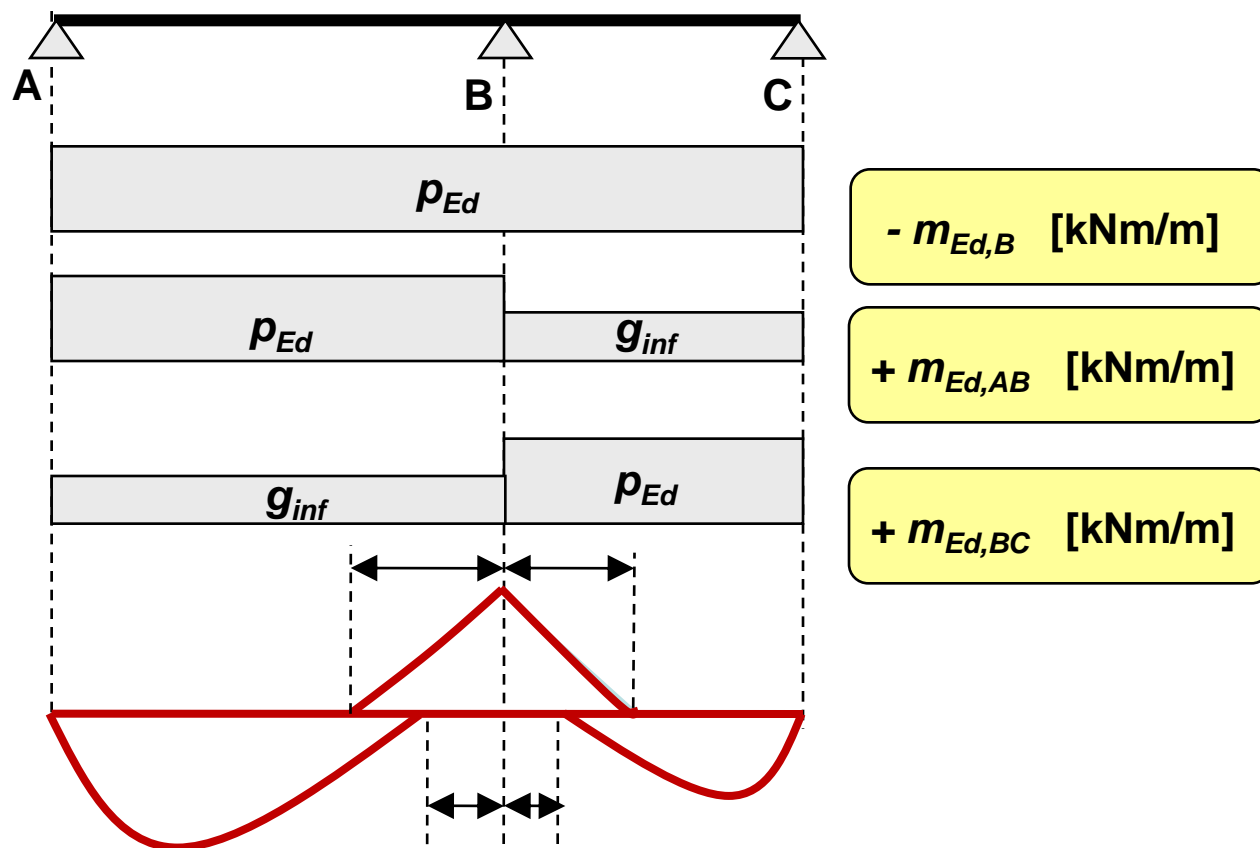
Három támaszú tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Három támaszú tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

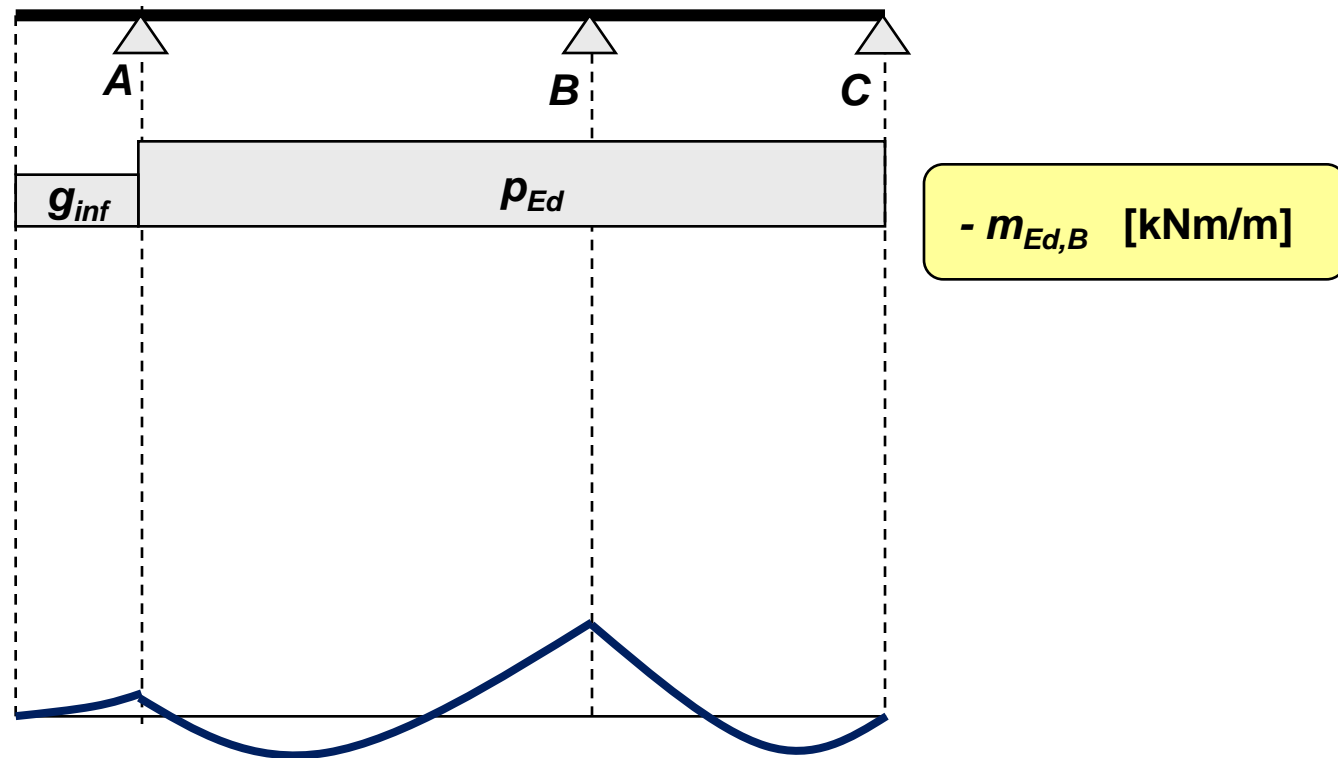
Három támaszú konzolos tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

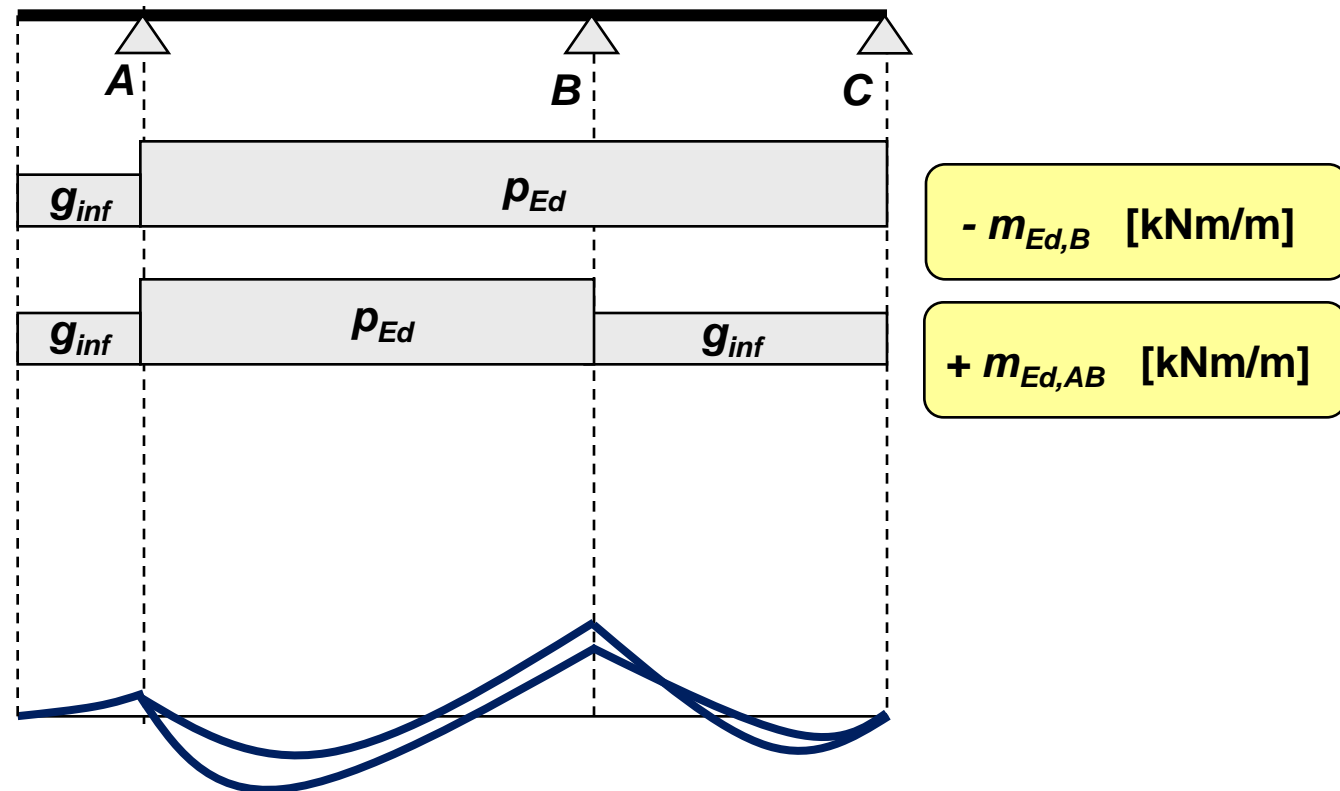
Három támaszú konzolos tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Három támaszú konzolos tartó



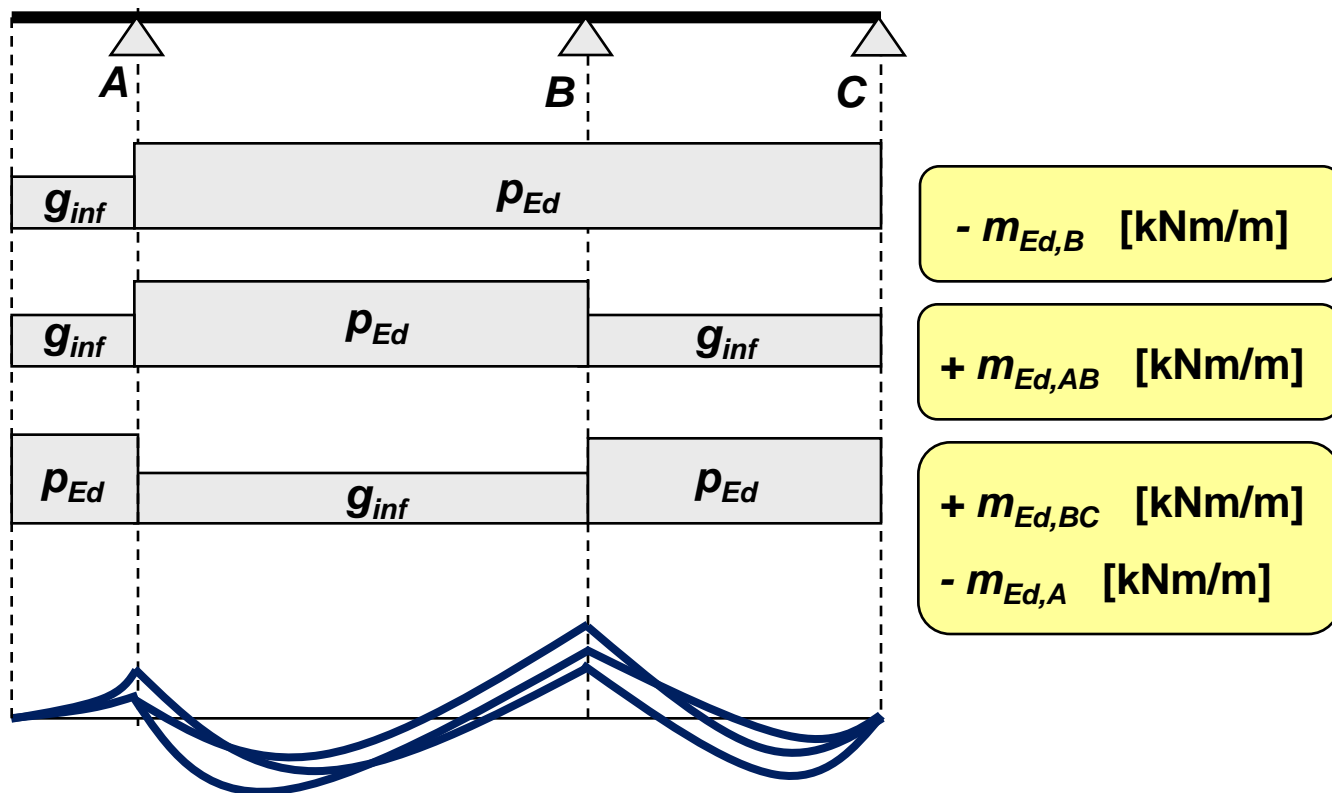
$- m_{Ed,B}$ [kNm/m]

$+ m_{Ed,AB}$ [kNm/m]

Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

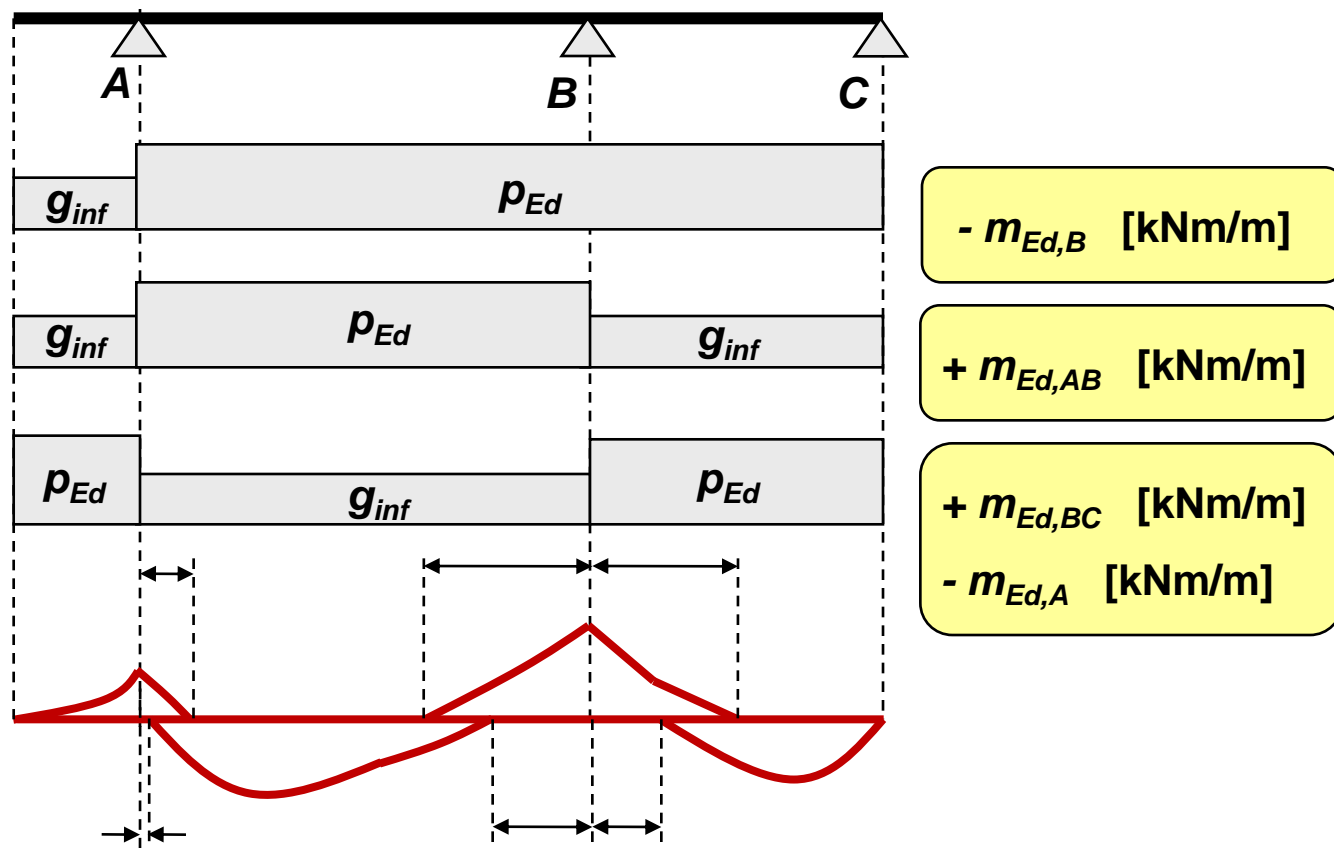
Három támaszú konzolos tartó



Analysis of one-way slabs

Egy irányban teherviselő lemezek megoldása

Három támaszú konzolos tartó

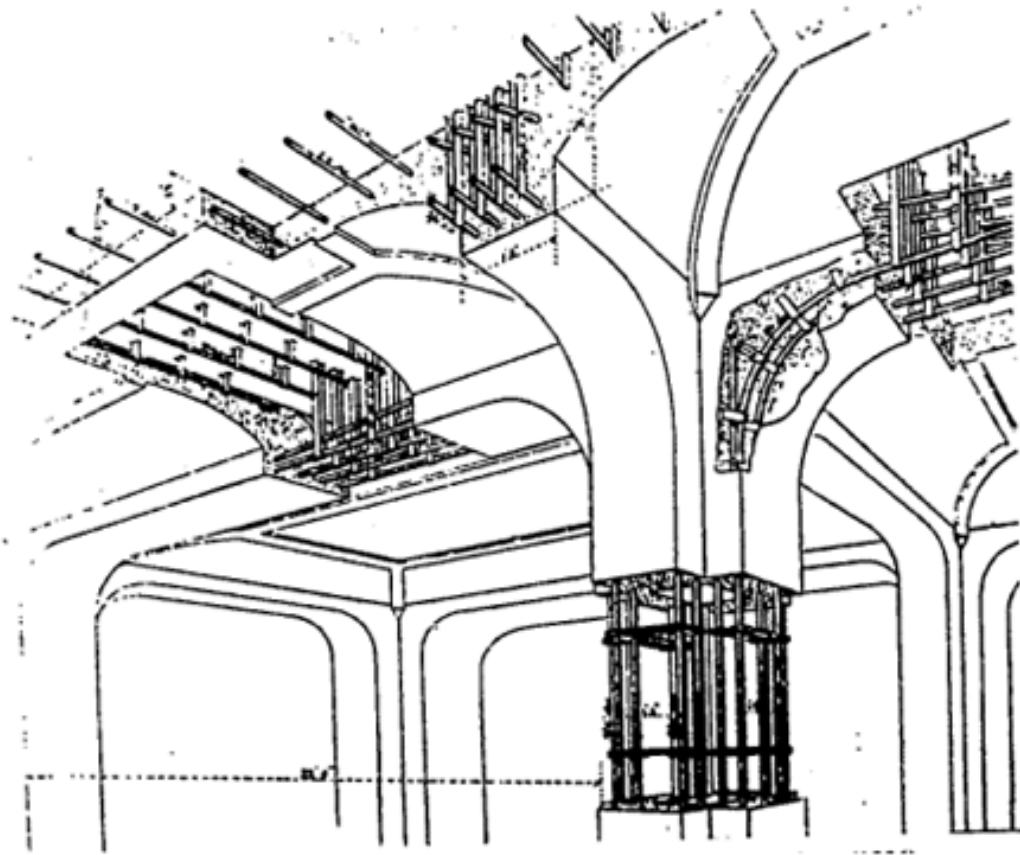


Reinforced Concrete Structures II.

Vasbetonszerkezetek II.

- Lemezelmélet -

Köszönöm a figyelmet!



Dr. Kovács Imre PhD
tanszékvezető
főiskolai tanár

E-mail:

dr.kovacs.imre@gmail.com

Mobil:

06-30-743-68-65

Iroda:

06-52-415-155 / 77764

WEB:

<http://epitotsz.mk.unideb.hu/>